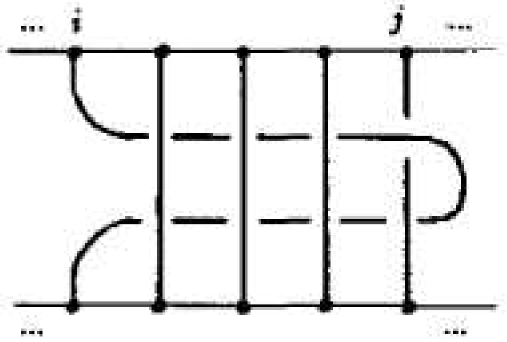

Рис. 1. Образующая группы крашеных кос

8. Крашеные косы. 28 марта 2013

Образующие группы крашеных кос

Крашеные косы — это косы, нити которых соединяют соответственные точки (точки с одинаковыми номерами). Группу крашеных кос обозначим K_n.

Задача 1. Докажите, что $K_n = \pi_1(\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n | z_i \neq z_j \text{ при } i \neq j\})$.

Теорема 1. *Группа крашеных кос порождена образующими b_{ij}, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (см. рис. 1).*

Доказательство проведём индукцией по n. При $n = 2$ распрямляем вторую нить. При $n > 2$ рассмотрим крашеную косу $d_{n+1} \in K_{n+1}$ и уберём её первую нить. Получится коса $a_n \in K_n$. Рассмотрим косу a_n^{-1} и добавим к ней первую нить, не зацепленную с остальными; в результате получим косу d'_{n+1}. Последние n нитей косы $c_{n+1} = d_{n+1}d'_{n+1}$ можно распрямить. После этого косу c_{n+1} можно представить в виде произведения кос b_{ij}. По предположению индукции косу a_n (а значит, и косу d'_{n+1}) можно представить в виде произведения кос b_{ij}.

Теорема Александера о гомеоморфизмах диска, неподвижных на крае

Группа крашеных кос тесно связана с группой H_n изотопических классов эквивалентности гомеоморфизмов круга с n дырками, неподвижных на крае.

Теорема 2. *Любой гомеоморфизм круга, тождественный на крае, изотопен тождественному гомеоморфизму.*

Основная идея доказательства изображена на рис. 2.

Другими словами, группа H_0 состоит из единичного элемента.

Гомеоморфизмы диска с дырками

Теорема 3. *Группа H_n изоморфна $K_n \oplus \mathbb{Z}^n$.*

Гомеоморфизму круга с n дырками, тождественному на крае, можно сопоставить гомеоморфизм круга, тождественный на крае. Этот гомеоморфизм изотопен тождественному. Движение центров вырезанных дисков при этой изотопии задаёт крашеную косу. Эта коса почти полностью определяет гомеоморфизм с точностью до изотопии — нужно только для каждого вырезанного диска добавить траекторию движения одной точки края этого диска. Эта траектория может обвиваться несколько раз вокруг нити, соответствующей центру вырезанного диска.

Каждая образующая b_{ij} соответствует скручиванию вдоль некоторой кривой; однократное обвивание траектории вокруг нити тоже соответствует скручиванию вдоль кривой.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 91–97.)

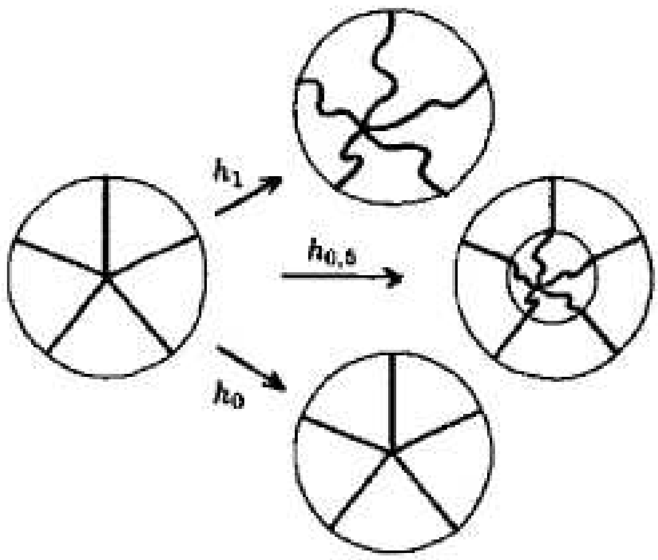

Рис. 2. Доказательство теоремы Александера