Рис. 1. Коэффициент зацепления

9. Перестройки трёхмерных многообразий. 4 апреля 2013

Коэффициент зацепления

Коэффициент зацепления двух компонент J и K некоторого ориентированного зацепления определяется следующим образом. Рассмотрим на диаграмме все перекрёстки, на которых кривая K проходит над J. Такие перекрёстки бывают двух типов (рис. 1), и коэффициент зацепления $\operatorname{lk}(J, K)$ — это сумма чисел ε_i по всем перекрёсткам.

Несложно проверить, что коэффициент зацепления не меняется при преобразованиях Рейдемейстера, поэтому он не зависит от выбора диаграммы зацепления.

Если $\operatorname{lk}(J, K) \neq 0$, то кривые J и K зацеплены (но если $\operatorname{lk}(J, K) = 0$, то кривые J и K могут быть как не зацепленными, так и зацепленными).

Задача 1. Докажите, что $\operatorname{lk}(J, K) = \operatorname{lk}(K, J)$.

Линзы. Диаграмма Хегора Линзы

Задача 2. Постройте клеточное разбиение линзы с одной клеткой в каждой размерности от 0 до 3.

Задача 3. Докажите, что линзы $L(p, q)$ и $L(p, q')$, где $qq' \equiv \pmod p$, гомеоморфны.

Задача 4. Докажите, что линза получается склейкой двух полноторий.

Задача 5. Выясните, как устроена диаграмма Хегора линзы $L(p, q)$.

Рациональные перестройки сферы

Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие получается из сферы S^3 посредством вырезания нескольких полноторий и приклейки их по каким-то гомеоморфизмам краёв. При этом полученное многообразие полностью определяется изотопическим классом образа J меридиана α при гомеоморфизме краёв. Пусть $J = p\alpha + q\beta$, где β — параллель.

Теорема 1. *а) Если замкнутая кривая $p\alpha + q\beta$ несамопересекающаяся, то либо числа p и q взаимно простые, либо одно из них равно 0, а другое ± 1.*

б) Если две замкнутые несамопересекающиеся кривые на торе гомотопны, то они изотопны.

Каждому полноторию можно сопоставить кривую, раздутием которой оно получается. Таким образом, перестройка задаётся зацеплением, каждой компоненте которого сопоставлено *оснащение* $r = p/q$.

$r = 1/0 = \infty$ — тождественная перестройка ($\alpha \mapsto \alpha$).

$r = 0/1 = 0$ — перестройка, меняющая местами параллели и меридианы ($\alpha \mapsto \beta$).

Перестройка сферы по незаузленной окружности с оснащением p/q даёт линзу $L(p,q)$.

Линзы $L(p,q)$ и $L(p, q \pm np)$ гомеоморфны, поэтому оснащения r и $\frac{1}{\pm n + r^{-1}}$ эквивалентны. По-другому это можно объяснить так: при разрезании полнотория по меридиану и скручивании на $\pm n$ оборотов кривая $p\alpha + q\beta$ переходит в кривую $p\alpha + (q \pm np)\beta$.

Целочисленные перестройки

Перестройка называется *целочисленной*, если все оснащения — целые числа, т.е. образ меридиана ровно один раз обходит тор в направлении параллели. В таком случае можно считать, что компонента зацепления и образ мередиана сонаправлены, поэтому на них можно натянуть ленту. Оснащение — это коэффициент зацепления краёв ленты. На рисун-

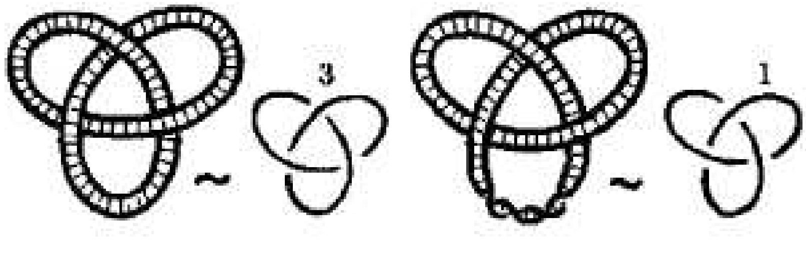


Рис. 2. Оснащение и лента

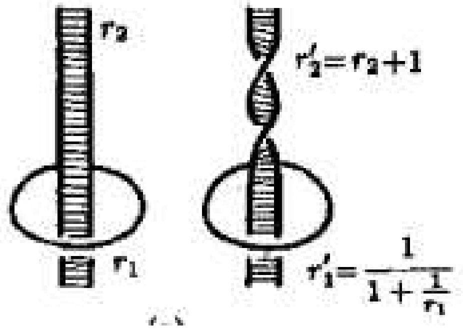


Рис. 3. Эквивалентные перестройки

ке 2 представлены два примера трилистника с разными оснащениями и соответствующие этим оснащениям ленты.

Эквивалентные перестройки

Разрезание полнотория, содержащего ленту, по меридиану и скручивание на $\pm n$ оборотов показывают, что перестройка по незаузленной окружности с оснащением r_1 и проходящей сквозь неё ленте, дающей оснащение r_2, эквавалентна престройке с $r_1' = (\pm n + r_1^{-1})$ и $r_2' = \pm n + r_2$; случай $n = 1$ изображён на рисунке 3.

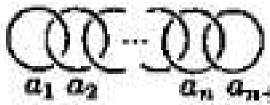
Если сквозь диск с границей J проходит не одна лента, а несколько лент, соответствующих одной и той же компоненте K, то справедливо аналогичное утверждение с тем же самым r_1' и с $r_2' = \pm n \operatorname{lk}^2(J, K) + r_2$.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 117–121, 142–163.)

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ *и* $a_{n+1} \in \mathbf{Q}$.

Тогда



$= L(p, q)$,

где p/q *задается непрерывной дробью*

$$\frac{p}{q} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \cdots - \cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

Рис. 4. Цепи и цепные дроби