Мы будем рассматривать ситуацию, когда есть несколько активных участников, и результат, получаемый каждым зависит от действий всех участников.

Самый простой вариант --- когда все одновременно и независимо делают какой-то выбор. При этом заранее всем известно, какие стратегии (варианты, из которых делается выбор) есть у каждого игрока и какой его выигрыш в каждом случае.

Если игроков два, то можно записать правила такой игры в виде таблицы. Первый выбирает строку, второй --- столбец, после чего пара чисел, стоящая в соответствующей ячейке, задаёт выигрыши.

Определение 1. Игра в нормальной форме задаётся множеством игроков M, множеством стратегий для каждого игрока, $S_m, m \in M$ и функцией выигрыша $u : \prod\limits_{m \in M} S_m \to \mathbb{R}^M$, которая по стратегиям, выбранным игроками, сообщает выигрыш каждого из них.

Разумеется, игроки могут не выбирать конкретных стратегий, а приписать вероятности каждому возможному своему выбору (выбор разных игроков пока будем считать независимым). Обычно при этом считается, что каждый максимизирует математическое ожидание своего выигрыша, хотя тут надо проявлять аккуратность. Во-первых, часто люди не любят риск; во-вторых, большие изменения могут иметь нелинейную оценку: потеря 10 процентов капитала для организации может быть восполнимой, потеря 110 процентов капитала означает обычно немедленное разорение.

Если хотеть изучать игры, в которых существенна многоходовость, удобнее определение, которое явно её упоминает.

Определение 2. Игра в развёрнутой форме задаётся деревом, у которого в каждой вершине указано, чей ход (возможно, ход делает природа --- то есть вероятности заданы исходно), а в каждом листе и на каждой бесконечной ветви указаны выигрыши игроков.

При этом до конца игры про выигрыши, зачастую, ничего не говорится.

Однако это определение не позволяет смоделировать игру в нормальной форме. На самом деле, нам не нужно, чтобы игроки делали выбор одновременно, достаточно, чтобы игроки делали свой выбор не зная, какой выбор сделали предыдущие. В терминах дерева это означает следующее.

Определение 3. Игра в развёрнутой форме с неполной информацией задаётся аналогично игре в развёрнутой форме, за исключением того, что некоторые вершины, в которых делает ход один и тот же игрок, объявлены неотличимыми, ходы из них поставлены во взаимнооднозначное соответствие (входящее в правила игры), и игрок обязан приписывать соответствующим ходам в разных копиях вершины равные вероятности. При этом в неотличимых вершинах список предыдущих действий игрока должен быть один и тот же, то есть игрок помнит, попадал ли он уже в некоторый класс эквивалентности и какие ходы он делал.

Примерами игр, которые лучше задавать именно в развёрнутой форме с неполной информацией, являются карточные игры. С одной стороны, даже просто (случайно выбранный) расклад карт известен игроку не полностью. С другой стороны, множество всех стратегий необозримо, хотя в каждый конкретный момент количество разрешённых ходов не так велико.

Замечание 1. Мы говорим, что игроки приписывают ходам вероятности. На самом деле, для человека приписать вероятности нескольким вариантам и сделать случайный выбор с такими вероятностями очень трудно. Например, если попросить несколько десятков человек случайно выбрать числа от 1 до 100, запись которых не включает цифр 3 и 7, то совпадений будет больше, чем ожидается (даже при честном подсчёте, то есть это не просто парадокс дней рождения), да и распределение будет довольно убедительно отличаться о выборки по равномерному распределению.

Замечание 2. Парадокс дней рождения --- сколько надо людей, чтобы у двоих из них совпали дни рождения? Если обобщить вопрос для случайного выбора k раз из N вариантов, то вероятность попарного несовпадения будет $1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\ldots(1-\frac{k-1}{N})$, так как каждый следующий должен не совпадать со всеми предыдущими. Уже при $k \approx \sqrt{N}$ у нас будет больше $\frac{\sqrt{N}}{2}$ сомножителей меньше $1-\frac{\sqrt{N}}{2}$, что даст не больше $\frac{1}{e}$.

На самом деле, любую игу можно записать в нормальной форме просто рассмотрев множество всех мыслимых образов поведения и моделируя результат их применения.

Примеры простейших игр в нормальной форме:

``Орлянка''. Каждый из двух игроков выбирает 0 или 1. Если выбранные числа совпали, то второй игрок объявляется угадавшим и получает выигрыш 1 (а первый получает 0). Иначе первый получает 1, а второй 0.

``Встреча''. Каждый из игроков выбирает 0 или 1 (одно из двух мест встречи). Если числа совпадают, встреча происходит, и все получают по 1, иначе выигрыши по 0.

``Дилемма заключённых''. Каждый из двух игроков может (независимо о действий другого) обеспечить себе 1 или второму 2. Если кто-то попросил для себя, а второй - для него, то выигрыши 3 и 0.

Теперь определим понятия, используемые при анализе игр. Во что мы можем верить или не верить про поведение игроков?

Определение 4. Стратегия x игрока m в игре в нормальной форме доминирует его же стратегию y (и называется доминирующей, а y при этом доминируемая), если при любом фиксированном наборе стратегий остальных игроков выигрыш при использовании x строго больше, чем при использовании y.

Часто можно считать, что игроки не используют строго доминируемые стратегии, так как это бы делалось в ущерб себе.

Рассматривают также определение нестрогого доминирования стратегий (то есть неравенства на выигрыши нестрогие). Сложность в работе с ними заключается в том, что для получения полезного понятия надо потребовать наличия набора стратегий остальных игроков, при котором они дадут разные выигрыши, а этот набор может быть выкинут при отбрасывании доминируемых стратегий других игроков.

Например, в игре ``дилемма заключённых'' доминирует стратегия просить для себя, что полностью решает игру, оставляя каждому игроку по одной стратегии.

В общем случае можно даже определить так называемое ядро игры по доминированию. Оно получается если из игры выкинуть все строго доминируемые стратегии, из получившейся игры выкинуть все стратегии, которые стали строго доминируемыми после этого выкидывания, и повторять этот процесс, пока в игре появляются после выкидывания новые строго доминируемые стратегии.

При этом, так как строгие неравенства транзитивны, если мы запрещаем некоторую строго доминирующюю стратегию игроку, то доминируемые ей стратегии останутся строго доминируемыми (доминируемость остальных стратегий тоже не изменится). Разумеется, у других игроков доминируемые стратегии такими и останутся, но могут появиться и новые (если был убран единственный вариант, который делал тратегию недоминируемой).

Благодаря этому неважно, убирать ли доминируемые стратегии вместе или по одной: убирая по одной, мы обязаны убрать всё, что уберём при обработке по группам; но ели мы уберём что-то лишнее, то самая ранняя по времени исключения стратегия не могла быть убрана, так как при уборке большего количества стратегий по группам она оставалась недоминируемой.

Если игроки могут договариваться (так, чтобы договорённости нельзя было нарушить), то имеет смысл понятие эффективности по Парето.

Определение 5. Набор стратегий игроков (по одной для каждого игрока) эффективен по Парето, если нет никакого другого набора стратегий, который каждому игроку давал бы строго больший выигрыш.

Если подписывается обязательное к выполнению соглашение, не задающее эффективной по Парето ситуации, это подозрительно.

Видно, что в ``дилемме заключённых'' решение по доминированию не было эффективным по Парето, то есть эффективность по Парето существенно использует договорённости.

С другой стороны, про ``встречу'' доминирование ничего не позволяет сказать. Можно ввести слабый аналог эффективности --- равновесие Нэша, в котором один игрок не может изменить ситуацию для себя.

Определение 6. Набор стратегий игроков (по одной для каждого игрока) называется равновесием Нэша, если никакой игрок не может поменять свою стратегию и получить строго больший выигрыш.

В игре ``встреча'' есть два очевидных равновесия Нэша --- когда игроки встречаются. Равновесие Нэша часто позволяет необязательному соглашению (или норме, соблюдение которой не контролируется) быть выполненным. Например, в большом магазине можно повесить большую перетяжку, рекомендующую заблудившимся встречаться в некотором месте, которое легко найти. Такую рекомендацию люди, как правило, будут соблюдать. Если бы перетяжка предписывала людям идти встречаться в разные места в зависимости от месяца рождения (что не даст равновесия Нэша), её бы никто не воспринял всерьёз.

Если не пользоваться вероятностными стратегиями, то в ``орлянке'' нет равновесия Нэша, так как проигравший поменяет стратегию, чтобы выиграть.

Найдём теперь равновесие Нэша в вероятностных (или смешанных, как их принято называть) стратегиях.

Если у одного из игроков вероятность выбора 0 отлична от $\frac{1}{2}$, то второму выгодно играть так как если бы более частый случай был единственным возможным. Но если игрок равновероятно загадывает 0 и 1, то второму всё равно как играть --- поэтому есть ровно одно равновесие Нэша, с вероятностями использования стратегий по $\frac{1}{2}$.

Упомянем сразу понятие совершенного на подыграх равновесия Нэша. Когда у нас есть игра в развёрнутой форме и набор стратегий, для каждого информационного множества есть распределение вероятностей на его элементах. Можно выкинуть все предыдущие ходы (и возможность, что они не привели в рассматриваемое множество) и рассмотреть подыгру, начинающуюся с того, что ходом природы выбирается случайная вершина в выбранном информационном множестве с вероятностями, пропорциональным вероятностям попадания в эти вершины в исходной игре при заданных стратегиях. Если заданные стратегии всё ещё задают равновесие Нэша в любой такой подыгре, равновесие называется совершенным на подыграх. Понятие совершенства на подыграх позволяет описать формально понятие неправдоподобной угрозы.

Мы определили равновесие Нэша. Посмотрим, хорошо ли оно применимо к играм в развёрнутой форме.

Рассмотрим следующую игру: есть монополист и есть потенциальный конкурент. Конкурент может отказаться от данного рынка (выигрыши по 0), или включиться в борьбу. В последнем случае монополист может оптимизировать свою прибыль (потеряв 1), и это принесёт конкуренту выигрыш 1. Или же монополист может продавать себе в убыток и понести ущерб 2, нанеся конкуренту ущерб 1. Игра не повторяется.

С одной стороны, есть равновесие Нэша: монополист собирается пойти на ценовую войну, а конкурент не решается попробовать захватить рынок. С другой стороны, если конкурент уже попробовал включиться в борьбу, то монополисту невыгодно выполнять свою угрозу. Поэтому во многих ситуациях такие угрозы совершенно неправдоподобны. В общем случае разумно ожидать, что не обязывающие формально обещания действовать в некоторых ситуациях себе в ущерб являются блефом.

Определение 7. Равновесие Нэша в игре в развёрнутой форме называется совершенным на подыграх, если оно (точнее, его ограничение) является равновесием Нэша в любой игре, полученной из исходной игры заменой начальной вершины на какую-то другую, достижимую из неё (другими словами, в игре, которая играется как окончание исходной после нескольких ходов).

Замечание 3. Для игр с неполной информацией при заданном наборе стратегий можно для каждого информационного множества построить условное распределение вероятностей на нём (при условии, что игроку вообще придётся делать ход в этом информационном множестве) и требовать, чтобы ни одному из игроков не было выгодно менять стратегию в игре, полученной заменой всего предыдущего дерева на один ход природы с таким же распределением результатов.

Это определение позволяет легко сказать, почему иногда подчёркивается, что несоразмерный ответный удар может произойти автоматически --- неправдоподобна угроза его нанести, так как это может быть не в интересах наносящей стороны; но так как ситуация, в которой он понадобится, является маловероятной (во всяком случае, в это хочется верить), то построение неотключаемой системы, которая нанесёт его автоматически, вполне оправданно, и превращает очевидный блеф в очень правдоподобную угрозу.

Другое определение ``хорошего'' равновесия Нэша можно дать и для игр в нормальной форме. Объясним сначала ситуацию, в которой это понятие возникает.

Рассмотрим следующую игру:

$$\begin{matrix} 4,4 & 4,-100 \\ -1,4 & 0,0 \end{matrix}$$

В этой игре есть два равновесия Нэша (левый верхний и правый нижний углы). Но представим, что игроки очень редко, но совершают ошибки. Тогда с точки зрения второго опасно использовать первую стратегию и лучше перейти на вторую, которая никогда не хуже при фиксированном ходе первого. Так же мог бы рассуждать и первый.

Формально это определяется так: Стратегия называется вполне смешанной, если все чистые стратегии входят в неё с положительными вероятностями. Равновесие Нэша называется равновесием дрожащей руки, если существует последовательность наборов вполне смешанных стратегий, сходящаяся к равновесию, такая что входящие в равновесие стратегии являются неулучшаемыми ответами на каждый из наборов в последовательности.

Заметим, что эта последовательность может быть устроена сложнее, чем просто приписывание равных вероятностей всем неиспользуемым вариантам.

$$\begin{matrix} 1,1 & 1,0 & 1,-100 \\ 0,1 & 0,0 & -0.1,-100.1 \\ -100,1 & -100.1,-0.1 & -5,-5 \end{matrix}$$

В этой игре равновесие в левом верхнем углу устойчиво, так как является оптимальным ответом на набор $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ для каждого игрока. Но заметим, что против $1, \varepsilon, \varepsilon$ это оптимальным ответом не является.