Мы определили равновесие Нэша и знаем, что если вероятностные стратегии запрещены, то его может не быть в игре в нормальной форме. А всегда ли оно есть в смешанных стратегиях? Ответ на этот вопрос помогает дать теорема Какутани.

Теорема Какутани Пусть X --- выпуклый компакт (таким образом, X должно быть вложено естественным образом в векторное пространство с топологией). Пусть f --- отображение из X во множество его подмножеств, такое, что образ каждой точки --- выпуклый компакт, а его ``график" замкнут. Другими словами, f можно считать непрерывным многозначным отображением. Тогда у f есть неподвижная точка, то есть $x : x \in f(x)$.

Это теорема топологическая, поэтому доказывать мы её не будем. Впрочем, можно посмотреть внимательно на её формулировку.

Если f было бы однозначным отображением, то это была бы теорема Брауэра (отображение шара в себя имеет неподвижную точку).

Можно посмотреть на условия и понять, что все они существенны. Если X невыпукло, то можно взять окружность и её поворот на 90 градусов. Если X не компактно, можно взять интервал и сжать его в два раза к одному из концов. Некомпактным образ одной точки не может быть из-за замкнутости графика, а если график не замкнут, то можно взять отрезок $[0; 1]$ и перевести левую половину (с $\frac{1}{2}$ вместе) в 0, а правую (уже без середины) в 1. Если же отказаться от выпуклости образа точки, то можно взять то же отображение, но перевести середину в обе точки --- и в 0, и в 1.

Кроме того, естественное исправление проблем (переход от круга к окружности, добавление концов к интервалу, добавление всего отрезка как образа середины) создаёт неподвижные точки самым очевидным способом.

Теперь покажем, как это связано с существованием равновесий Нэша. Они существуют, если множества, из которого игроки выбирают стратегии --- выпуклые компакты, функция выигрыша одного игрока от его хода всегда достигает максимума на выпуклом компакте (при любом фиксированном наборе стратегий других игроков) и функция выигрышей (для всех игроков сразу) непрерывна. Подробно мы разберём доказательство для случая смешанных стратеги при конечном числе детерминированных.

Теорема 1. (Теорема Нэша) В игре с конечным числом игроков и стратегий у каждого из них есть смешанное равновесие Нэша.

Доказательство 1. Применим теорему Какутани. Каждый игрок задаёт набор вероятностей для своих стратегий. Такие наборы образуют выпуклый компакт, а именно симплекс. Полный набор стратегий игроков выбирается из произведения этих симплексов --- выпуклый компакт. Отображение f действует в декартово произведение симплексов, и образ каждой точки зададим как декартово произведение. В симплексе, соответствующем данному игроку, выделим множество всех стратегий, дающих максимальную прибыль при данном поведении остальных игроков. Это множество --- симплекс с вершинами в оптимальных чистых стратегиях. После декартова произведения получим, что каждую точку отобразили в выпуклый компакт --- произведение симплексов, возможно, состоящих из одной точки. Замкнутость графика легко проверяется (у нас есть почти явная формула). Неподвижная точка даст набор стратегий, такой что множество оптимальных стратегий каждого игрока включает текущую, то есть равновесие Нэша, что и требовалось.

Напоследок покажем, что дилемма заключённых с ситуацией, в которой двое минимизирующих свой выигрыш игроков получают (в равновесии) больше, чем двое максимизирующих, не является пределом обращения устремлений игроков против них.

Определение 1. Рассмотрим симметричную игру, заданную следующей таблицей:

$$\begin{array}{cccc} 8,8 & 6,16 & 5,2 & 7,10 \\ 16,6 & 15,15 & 13,4 & 14,12 \\ 2,5 & 4,13 & 3,3 & 1,11 \\ 10,7 & 12,14 & 11,1 & 9,9 \end{array}$$

Игроков два, первый выбирает столбец, второй строку. Первое число в клетке задаёт выигрыш первого, второе число --- выигрыш второго. Будем называть эту игру ``сотрудничество''. Причины этого ясны из свойств равновесий Нэша в ней.

Пусть эгоисты максимизируют свой выигрыш, аскеты --- минимизируют свой выигрыш, а кооператоры максимизируют сумму выигрышей. Найдите равновесия Нэша для игры каждой пары игроков. Обратите внимание, что кооператорам ничто не может помешать достичь их цели.

Существенно, что когда аскет, играя с эгоистом, выигрывает больше, чем эгоист на его месте, то отличается не столько поведение самого игрока, сколько ожидания других игроков о его поведении.

Эффективность по Парето относится к ситуации договорённости между всеми игроками; равновесие Нэша описывает независимые действия игроков. Есть и промежуточный подход, *кооперативные игры*, когда известны возможности любого набора игроков сообща обеспечить себе некоторый исход.

Определение 2. Кооперативная игра задаётся множеством игроков и отображением выигрыша для коалиций.

Для каждого непустого подмножества игроков должно быть известно множество наборов выигрышей, которые оно может обеспечить своим участникам. Обычно считается, что множества выигрышей замкнутые, ограничены сверху по каждой координате, содержат вместе с каждой точкой все меньшие.

Кроме того, обычно считается, что объединение коалиций может обеспечить своим участникам то, что эти коалиции могли обеспечить по отдельности (и, возможно, предоставляют возможность обеспечить что-то другое).

Определение 3. Набор выигрышей x доминирует набор выигрышей y, если существует такая коалиция, что она может обеспечить себе выигрыши, указанные в наборе x и при этом каждый её участник получает больший выигрыш в наборе x.

Определение 4. *Коалиционным равновесием* называется такой набор выигрышей (который может обеспечить всеобщая коалиция), что никакой набор игроков не может строго улучшить положение всех своих участников, сформировав новую коалицию, состоящую ровно из них.

Другими словами, это набор выигрышей, который не доминируется никаким набором выигрышей.

Множество всех равновесий называется ядром игры.

Теорема 2. Пусть число игроков и возможных коалиций конечно. Если в каждой коалиции выигрыш делится поровну, существует хотя бы одно равновесие.

Доказательство 2. Докажем по индукции. Для пустой игры утверждение тривиально.

Найдём какую-нибудь коалицию, обеспечивающую максимальный выигрыш. Сформируем её; её участников, очевидно, нечем переманить, поэтому из дальнейшего рассмотрения их можно исключить. По предположению индукции, для оставшихся игроков есть равновесие. Добавим к нему построенную изначально коалицию и получим требуемое.

Коалиционное равновесие существует не всегда. Например, если три игрока делят какой-то ресурс и решение может быть утверждено большинством голосов, равновесия нет.

Определение 5. *Решением Неймана-Моргенштерна* для кооперативной игры называется множество наборов выигрышей, такое что каждый из них может быть обеспечен всеобщей коалицией, в каждом из наборов ни один игрок не может в одиночку (с помощью одноэлементной коалиции) улучшить своё положение, ни один из них не доминирует никакой другой, а любой доступный всеобщей коалиции набор выигрышей не из решения доминируется каким-то распределением выигрышей из набора.

Примером такого решения является множество наборов выигрышей $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\}$ для дележа единицы ресурса голосованием.

К сожалению, можно построить игру, в которой решения Неймана-Моргенштерна не существует (но она сложная).

Можно построить аналог смешанных стратегий для кооперативных игр, и в смешанных стратегиях равновесие всегда найдётся.

Смешанной стратегией называется указание для каждой коалиции доступного ей набора выигрышей и доли внимания участников, на которую она претендует. Доля внимания находится между нулём и единицей; выигрыши от активности в этой коалиции умножаются на долю внимания, а сумма долей внимания, уделяемых одним игроком всем коалициям с его участием, должна быть ровно единица.

Легко видеть из теоремы Какутани, что в таких терминах всегда есть коалиционно устойчивое равновесие.

Вектор Шепли.

Пусть есть кооперативная игра, в которой игроки имеют право передавать друг другу полезность (так называемые *побочные выплаты*). Таким образом, коалиция описывается только суммой выплат, которые она может произвести.

Желательно, чтобы ресурсы объединения непересекающихся коалиций были не меньше суммы ресурсов.

Мы хотим распределить ресурсы всеобщей коалиции так, чтобы правило коммутировало с переименованием игроков без смены игры по сути, было линейным, использовало все ресурсы и приписывало 0 игроку, добавление которого не меняет ценность коалиции.

Оказывается, при этом может получиться только вектор Шепли — каждый игрок получает среднее по всем перестановкам игроков приращения ресурсов коалиции от его прихода.

Действительно, он обладает всеми этими свойствами, а единственность следует из разложения игры по правильному базису. В базис входят игры, у которых есть ключевая коалиция: все включающие её коалиции имеют один и тот же набор ресурсов, а остальные не имеют ничего.

Такие игры образуют базис, так как можно брать самую короткую из ещё нерассмотренных коалиций и вычитать её выигрыш из всех больших (выделяя ещё одну базисную компоненту).