

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Повторный экзамен. 8.10.2013.**

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо не позднее, чем 26 октября, отдать мне или положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вазе внизу в конверте с моим именем.

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач.

Задача 1. Рассмотрим кривую, у которой кривизна не обращается в ноль. Пусть \mathbf{w} некоторый постоянный вектор. Доказать, что если в каждой точке кривой соответствующая нормальная плоскость (то есть плоскость, порождённая векторами \mathbf{n} и \mathbf{b} из репера Френе) содержит вектор \mathbf{w} , то кривая плоская (5 баллов).

Задача 2. Пусть \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ортонормальный базис в касательном пространстве в точке p двумерной поверхности в \mathbb{E}^3 . Докажите, что

$$H = \Pi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \Pi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).$$

(5 баллов).

Задача 3. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика.

Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M . Пусть R тензор Римана риманова многообразия M , а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i , $i = 1, 2$.

Доказать, что $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R^1(X_1, Y_1)Z_1, W_1 \rangle + \langle R^2(X_2, Y_2)Z_2, W_2 \rangle$. (5 баллов).

Задача 4. Пусть в условиях предыдущей задачи $\sigma \subset T_p M$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1, 2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1 , и на вектор, касательный к M_2 ». Доказать, что тогда секционная кривизна в точке p в направлении σ равна нулю, $K_\sigma = 0$. (5 баллов).

Задача 5. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в $T_p G$ неотрицательна (10 баллов).

Задача 6. Доказать, что $\text{SO}(3)$ с метрикой, соответствующей скалярному произведению $\langle \xi, \eta \rangle_e = \text{tr } \xi \eta^T$, является пространством постоянной кривизны, то есть доказать, что секционная кривизна группы $\text{SO}(3)$ является константой, то есть не зависит ни от точки, ни от выбранной двумерной плоскости в касательном пространстве. Найти эту константу (10 баллов).

Задача 7. Докажите, что для многообразия положительной секционной кривизны $K \geq \text{const} > 0$ существует такая постоянная T , что любая геодезическая, длина которой не меньше чем T , содержит пару точек, сопряжённых вдоль этой геодезической. (10 баллов).

Задача 8. Пусть ξ комплексное расслоение, $\text{rk } \xi = k$, а $S^2 \xi \subset \xi \otimes \xi$ его симметрический квадрат. Найдите $c_1(S^2 \xi)$ (10 баллов).

Задача 9*. С помощью характеристических классов докажите, что $\mathbb{C}P^2$ не может быть краем какого-либо многообразия (20 баллов).