Нормирования и локальные поля.

Задача 1 (нормализованные нормирования и мера Хаара). Покажите, что на аддитивной группе K^+ локально компактного поля с неархимедовым нормированием, существует и единственна мера μ, инвариантная относительно сдвигов (т. е. $\mu(\alpha + U) = \mu(U)$ для любого $\alpha \in K$ и измеримого подмножества $U \subset K$), удовлетворяющая условию $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$. При этом для меры μ и нормализованного нормирования $\| \ \|$ на K выполнено $\mu(\alpha + \beta\mathcal{O}_K) = \|\beta\|$.

Задача 2. Пусть K — поле, полное относительно дискретного нормирования и имеющее конечное поле вычетов. Покажите, что K — либо поле рядов Лорана $k((t))$, либо конечное расширение $\mathbb{Q}_p$.

Задача 3 (ряды Пюизо). Определим множество рядов Пюизо над полем k как $k((t^{1/\infty})) = \bigcup\limits_{d>0} k((t^{1/d}))$ (т. е. множество рядов Лорана от дробных степеней t с ограниченными знаменателями). Покажите, что для алгебраически замкнутого поля k поле $k((t^{1/\infty}))$ также алгебраически замкнуто. Чему равно алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_q((t))$?

Задача 4. Пусть $\bar{\mathbb{Z}}_p$ — целое замыкание $\mathbb{Z}_p$ в алгебраическом замыкании $\bar{\mathbb{Q}}_p$ поля $\mathbb{Q}_p$.

a) Покажите, что $\bar{\mathbb{Z}}_p$ целозамкнуто, имеет единственный ненулевой простой идеал, но не является Нетеровым.

b) Покажите, что сопоставление $\rho \mapsto I_\rho = \{x \in \bar{\mathbb{Q}}_p \mid |x| < \rho\}$ — биекция между неотрицательными вещественными числами, меньшими 1, и бесконечно порожденными идеалами в $\bar{\mathbb{Z}}_p$.

c) Покажите, что сопоставление $r \mapsto I_r = \{x \in \bar{\mathbb{Q}}_p \mid |x| \le r\}$ — биекция между неотрицательными рациональными числами, меньшими 1, и конечно порожденными идеалами в $\bar{\mathbb{Z}}_p$. Покажите, что все такие идеалы главные.

d) Придумайте примеры колец, удовлетворяющих ровно двум из трех условий Дедекиндовости для всех возможных наборов условий (т. е. три примера).

Задача 5 (насколько $\mathbb{C}_p$ больше $\bar{\mathbb{Q}}_p$). a) Приведите пример элемента из $\mathbb{C}_p$, не лежащего в $\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Подсказка: используйте примитивные корни из единицы возрастающей степени.

b^*) Докажите, что $\mathbb{C}_p$ нельзя представить в виде алгебраического расширения поля, полученного присоединением счётного числа элементов поля $\mathbb{C}_p$ к $\bar{\mathbb{Q}}_p$ (т. е. $\mathbb{C}_p$ имеет несчётную степень трансцендентности над $\bar{\mathbb{Q}}_p$).

c^*) Будет ли счётной степень трансцендентности $\mathbb{C}_p$ над p-адическим пополнением максимального неразветвлённого расширения $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}$?

Задача 6° (многоугольник Ньютона). Пусть K — полное поле дискретного нормирования, $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x], f \not\equiv 0$. Пусть $l_r(f)$ и $s_r(f)$ — максимальное и минимальное значения i соответственно, для которых $|a_i|r^i = \max\limits_j(|a_j|r^j)$.

a) Покажите, что l_r и s_r продолжаются до гомоморфизмов группы $K(x)^\times \to \mathbb{Z}$.

b) Докажите, что число нулей α многочлена f в алгебраическом замыкании K с учётом кратностей, удовлетворяющих условию $|\alpha| = r$ ($| \ |$ — продолжение нормирования на алгебраическое замыкание K), равно $l_r(f) - s_r(f)$.

c) Покажите, что многочлен $\prod\limits_{f(\alpha)=0, |\alpha|=r} (x - \alpha)$ имеет коэффициенты в K.

d) Определим многоугольник Ньютона f как нижнюю выпуклую оболочку множества точек $(i, -\log|a_i|)$ (основание логарифма можно выбирать так, чтобы аддитивное нормирование имело множество значений $\mathbb{Z}$), где i пробегает все индексы с $a_i \neq 0$ (т. е. многоугольник Ньютона — множество $\{(x, y) \in C \mid$ не существует $(x, y') \in C$ с $y' < y\}$, где C —

выпуклая оболочка множества точек). Покажите, что длина проекции на ось x сегмента многоугольника Ньютона с наклоном $\log r$ равна $l_r(f) - s_r(f)$, а значит количеству корней $f(x)$ с нормой r.

e) Найдите многоугольник Ньютона следующих многочленов. Что можно сказать об их корнях?

$$1-X+pX^2;\ 1-X^3/p^2;\ 1+X^2+pX^4+p^3X^6;\ \sum_{i=1}^{p} iX^{i-1};\ (1-X)(1-pX)(1-p^3X);\ \prod_{i=1}^{p^2}(1-iX).$$

f) Найдите два таких приведённых многочлена степени 3 в $\mathbb{Q}_5[X]$ с одинаковым многоугольником Ньютона, что один из них неприводим, а другой нет.

g) Найдите неприводимый приведённый многочлен в $\mathbb{Z}[X]$ степени 6, который разлагается в $\mathbb{Q}_5[X]$ в произведение трёх неприводимых многочленов степени 2.

h) Пусть $f(X) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[X]$ — многочлен, многоугольник Ньютона которого состоит из одного отрезка, соединяющего точки $(0,0)$ и (n,m). Покажите, что $f(X)$ неприводим в $\mathbb{Z}_p$, если n и m взаимно просты. Выведите отсюда критерий неприводимости Эйзенштейна.

i) Всякий ли неприводимый многочлен $f(X) \in 1 + X\mathbb{Z}_p[X]$, имеет многоугольник Ньютона того же типа, что в предыдущем пункте?

Задача 7 (разложение многочленов на множители).

a) Пусть K — полное поле дискретного нормирования, $f(x), g(x), h(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ — приведённые многочлены. Предположим, что $\delta = |f(x) - g(x)h(x)| < |\mathrm{Res}(g,h)|^2 = r^2$ (норма многочлена — максимум модулей его коэффициентов, Res — результант двух многочленов). Докажите, что найдутся такие $G(x), H(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, что $|G(x) - g(x)| < r$, $|H(x) - h(x)| < r$ и $f(x) = G(x)H(x)$.

Подсказка: последовательно строим всё лучшие приближения к $f(x)$, записывая $g(x) = g^*(x) + \gamma(x)$, $h(x) = h^*(x) + \chi(x)$, где $\deg(\gamma) = \deg g - 1$, $\deg(\chi) = \deg h - 1$. Определитель матрицы левой части уравнения $g\chi + h\gamma = f - gh$ на коэффициенты $\gamma(x)$ и $\chi(x)$ совпадает с результантом $\mathrm{Res}(g,h)$. Отсюда находим γ и χ, при этом $|\chi(x)|, |\gamma(x)| \leq \frac{\delta}{r}$. Теперь $|f(x) - g^*(x)h^*(x)| < \delta$ и $|\mathrm{Res}(g^*,h^*)| = |\mathrm{Res}(g,h)|$.

b) Проверьте, что утверждение предыдущего упражнения верно, если заменить условие $\delta < r^2$ на $\delta < \mathrm{Disc}(f)$.

Подсказка: $\mathrm{Disc}(gh) = \mathrm{Disc}(g)\mathrm{Disc}(h)\mathrm{Res}(g,h)^2$

Задача 8. Пусть K — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$, m — натуральное число, а $(K^\times)^m$ множество m-х степеней элементов из $K^\times$.

a) Предположим, что $|m|_p = 1$ и K не содержит корней степени m из 1, отличных от 1. Докажите, что индекс мультипликативной подгруппы $(K^\times)^m$ в $K^\times$ равен m.

b) Опустим предположения предыдущего пункта. Докажите, что индекс $(K^\times : (K^\times)^m) = \frac{m\omega}{|m|_p}$, где ω — число корней из 1 степени m, содержащихся в K.

Задача 9. Пусть L/K — конечное расширение локально компактных полей, v — нормализованное аддитивное нормирование на L. Положим $U_L^{(i)} = 1 + \mathfrak{P}_L^i$, где $\mathfrak{P}_L$ — максимальный идеал в $\mathcal{O}_L$, кроме того $U_L^{(0)} := U_L := \mathcal{O}_L^\times$.

a) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t = v(n)$. Покажите, что возведение в степень n — изоморфизм $U_L^{(i)} \to U_L^{(i+t)}$ при $i > t$.

b) Пусть V — открытая подгруппа группы единиц $\mathcal{O}_L$. Покажите, что подгруппа $\{u^n \mid u \in V\}$ открыта.

c) Докажите, что $N_{L/K}$ непрерывное открытое отображение.

Задача 10 (приложения леммы Краснера). a°) Пусть p — такое простое число, что -1 не имеет квадратного корня в $\mathbb{Q}_p$. Найдите ϵ, для которого $\mathbb{Q}_p(\sqrt{-a}) = \mathbb{Q}_p(\sqrt{-1})$ при любом a с $|a-1|_p < \epsilon$.

b°) Для какого ϵ из неравенства $|a-p|_p < \epsilon$ следует совпадение $\mathbb{Q}_p(\sqrt{a})$ с $\mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$?

Подсказка: отдельно исследуйте случай $p=2$.

c°) Определите все неизоморфные квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$.

Подсказка: в случае $p=2$ их 7 штук.

d) Определите все различные кубические расширения поля $\mathbb{Q}_7$.

Задача 11 (слабо разветвлённые расширения). Пусть K — локально-компактное поле с неархимедовым нормированием, $k=\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ — поле вычетов, $p=\operatorname{char} k$. Напомним, что конечное расширение L/K называется слабо разветвлённым, если $p\nmid e(L/K)$ (как обычно, $e(L/K)$ — индекс ветвления, $f(L/K)=[l:k]$ — степень расширения поля вычетов).

a) Пусть L/K — произвольное конечное сепарабельное расширение K. Покажите, что в L есть такое подполе L_1, что всякое слабо разветвлённое расширение $K'/K, K'\subset L$, является подполем L_1 и обратно. Убедитесь, что $[L:L_1]$ является степенью p.

b) Убедитесь, что L_1 есть неподвижное поле первой группы ветвления $G_1=\{\sigma\in \operatorname{Gal}(L/K) \mid |\sigma(\Pi)-\Pi|<|\Pi|\}$.

c) Пусть L/K — нормальное вполне и слабо разветвлённое расширение степени e. Докажите, что K содержит первообразный корень степени e из единицы и существует элемент $c\in K^\times$, являющийся униформизующей для K, для которого $L=K(c^{1/e})$.

Подсказка: используйте лемму Гензеля, чтобы показать наличие корней из единицы, и теорию Куммера, для того, чтобы убедиться, что $L=K(c^{1/e})$.

d) Обратно, если $p\nmid e$ и K содержит первообразный корень степени e из единицы, и, если c — униформизующая K, то $L=K(c^{1/e})$ нормально, вполне и слабо разветвлено над K и имеет степень e.

e) Покажите, что группа Галуа максимального слабо разветвлённого расширения K над его максимальным неразветвлённым расширением $\operatorname{Gal}(K^{\mathrm{tr}}/K^{\mathrm{nr}})\cong\prod\limits_{l\neq p}\mathbb{Z}_l$.

f^*) В условиях предыдущего пункта изучите структуру $\operatorname{Gal}(K^{\mathrm{tr}}/K)$.

Задача 12 (кольца целых неразветвленных расширений и вектора Витта). Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

a) Покажите, что любой формальный ряд из $\mathbb{W}(R):=1+tR[[t]]$ однозначно представляется в виде $\prod\limits_{s\geq 1}(1-x_st^s)$. Будем называть $\{x_s\}$ координатами степенного ряда.

b) Определим сложение в $\mathbb{W}(R)$ как умножение в $1+tR[[t]]$, а умножение в $\mathbb{W}(R)$ формулой:

$$\left(\prod_{s\geq 1}(1-x_st^s)\right)\circ\left(\prod_{s\geq 1}(1-y_st^s)\right):=\prod_{s,e\geq 1}(1-x_s^{e/(s,e)}y_e^{s/(s,e)}t^{[s,e]})^{(s,e)},$$

где (s,e) и $[s,e]$ — НОД и НОК соответственно. Покажите, что $\mathbb{W}(R)$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Подсказка: рассмотрите сначала случай $R\supset\mathbb{Q}$ и покажите, что минус логарифмическая производная $\prod\limits_{s\geq 1}(1-x_st^s)\mapsto\sum\limits_{n\geq 1}w_nt^{n-1}$, где $w_n=\sum\limits_{d|n}dx_d^{n/d}$, определяет гомоморфизм $\mathbb{W}(R)$ в кольцо формальных степенных рядов с покомпонентным сложением и умножением.

c) Пусть S — такое множество натуральных чисел, что, если $s\in S$ и $d\mid s$, то $d\in S$. Докажите, что координаты сумм (произведений) с номерами из S зависят только от координат слагаемых (сомножителей) с номерами из S. То есть множество формальных степенных рядов $\mathbb{W}_S(R)$ вида $\prod\limits_{s\in S}(1-x_st^s)$ также образует кольцо, если учитывать только координаты с номерами из S.

d) Для простого p положим $\mathbb{W}_{p,n} := \mathbb{W}_S(R)$, если $S = \{1, p, \dots, p^n\}$ и $\mathbb{W}_p(R) := \mathbb{W}_S(R)$ для $S = \{1, p, p^2, p^3, \dots\}$. Докажите, что $\mathbb{W}_{p,n}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{W}_p(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$.

e) Покажите, что $\mathbb{W}_p(\mathbb{F}_{p^n})$ — кольцо целых в неразветвленном расширении $\mathbb{Q}_p$ степени n.

f) Убедитесь, что $\mathbb{W}_p(\bar{\mathbb{F}}_p)$ — кольцо целых в пополнении максимального неразветвленного расширения $\mathbb{Q}_p$.

Задача 13. a) Пусть L/K — конечное неразветвлённое расширение локально компактных полей. Покажите, что отображение следа сюръективно переводит $\mathfrak{P}_L^i$ в $\mathfrak{p}_K^i$, а отображение нормы сюръективно переводит $U_L^{(i)}$ в $U_K^{(i)}$ для всех $i \geq 0$.

Подсказка: стройте элементы последовательно, как в лемме Гензеля.

b) Пусть L/K слабо разветвлено с индексом ветвления e. Убедитесь, что $N_{L/K}(U_L^{(ei)}) = U_K^{(i)}$ для всех $i \geq 1$.

Одно из утверждений локальной теории полей классов — изоморфизм $\mathrm{Gal}(L/K) \cong K^\times/N_{L/K}(L^\times)$ и равенство $[U_K \colon N_{L/K}(U_L)] = e$ для любого абелева расширения L/K.