§14. Пространство с билинейной формой

14.1. Билинейные формы. Пусть V — векторное пространство над полем $\Bbbk$. Отображение $\beta : V \times V \to \Bbbk$, $(u, w) \mapsto \beta(u, w)$, линейное по каждому из двух аргументов при фиксированном другом, называется *билинейной формой* на пространстве V. Билинейность означает, что при всех $\lambda \in \Bbbk$ и $u, w \in V$ выполняются равенства

$$\beta(u, \lambda w) = \lambda\beta(u, w) = \beta(\lambda u, w)$$
$$\beta(u_1 + u_2, w_1 + w_2) = \beta(u_1, w_1) + \beta(u_1, w_2) + \beta(u_2, w_1) + \beta(u_2, w_2)\,.$$

Если на пространствах V_1 и V_2 заданы билинейные формы β_1 и β_2, то линейное отображение $f : V_1 \to V_2$ называется *изометрическим* (или *гомоморфизмом билинейных форм*), если $\forall\, v, w \in V_1$ $\beta_1(v, w) = \beta_2\big(f(v), f(w)\big)$. Билинейные формы β_1 и β_2 называются *изоморфными*, если между пространствами V_1 и V_2 имеется изометрический изоморфизм.

14.1.1. Матрицы Грама. Билинейные формы на V образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \to \Bbbk$. Если зафиксировать в пространстве V базис $e = (e_1, e_2, \dots , e_n)$, то каждая билинейная форма β будет однозначно задаваться своими значениями $\beta_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ на всевозможных парах базисных векторов. Таблица этих значений называется *матрицей Грама* формы β. Мы будем обозначать матрицы Грама одноимёнными формам брольшими буквами:

$$B_e = \big(\beta_{ij}\big)\ , \quad \text{где} \quad \beta_{ij} = \beta(e_i, e_j)\,.$$

Значение формы β на любой паре векторов $u = ex = \sum x_i e_i$ и $w = ey = \sum y_j e_j$ равно:

$$\beta(u, w) = \beta\Big(\sum_i x_i e_i\,, \sum_j y_j e_j\Big) = \sum_{ij} \beta_{ij} x_i y_j = x^t B y\,, \tag{14-1}$$

где через x^t и y обозначены, соответственно, строка и столбец координат векторов u и w в базисе $e = (e_1, e_2, \dots , e_n)$. Поскольку нулевую матрицу Грама имеет лишь тождественно нулевая билинейная форма, и любая матрица $B = \big(\beta_{ij}\big)$ размера $n \times n$ задаёт по формуле (14-1) билинейную форму β на пространстве с базисом $e = (e_1, e_2, \dots , e_n)$, отображение $\beta \mapsto B_e$, сопоставляющее билинейной форме β её матрицу Грама в фиксированном базисе e, задаёт изоморфизм пространства билинейных форм с пространством квадратных матриц размера $n \times n$. В частности, размерность пространства билинейных форм на n-мерном векторном пространстве равна n^2.

Более общим образом, произвольным двум наборам векторов пространства V

$$u = (u_1, u_2, \dots , u_k) \quad \text{и} \quad w = (w_1, w_2, \dots , w_m)$$

можно сопоставить их *взаимную матрицу Грама* $B_{uw} = \big(\beta(u_i, w_j)\big)$. Если для двух векторов $a, b \in V$ положить

$$a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \beta(a, b) \in \Bbbk\,, \tag{14-2}$$

а для двух матриц A, B, элементами которых являются векторы пространства V, обозначить через $A \cdot B$ матрицу с элементами из $\Bbbk$, вычисленную по правилам умножения матриц с использованием для перемножения векторов операции (14-2), то взаимную матрицу Грама двух наборов векторов $u = (u_1, u_2, \dots , u_k)$ и $w = (w_1, w_2, \dots , w_m)$ можно описать формулой $B_{uv} = u^t \cdot w$, где u^t — столбец из векторов $u_1, u_2, \dots, u_k$. Отметим, что

$$B_{wu} = B_{uw}^t\,.$$

Если наборы векторов u и w линейно выражаются через наборы векторов e и f по формулам $u = eC_{eu}$ и $w = fC_{fw}$, то матрица Грама B_{uw} выражается через матрицу Грама B_{ef} и матрицы перехода C_{eu} и C_{fw} по формуле

$$B_{uw} = u^t \cdot w = \left(eC_{eu}\right)^t \cdot \left(fC_{fw}\right) = C_{eu}^t e^t \cdot fC_{fw} = C_{eu}^t B_{ef} C_{fw}\,. \tag{14-3}$$

В частности, если два базиса e и f пространства V связаны переходом $f = eC_{ef}$, то

$$B_f = C_{ef}^t B_e C_{ef} = \left(C_{fe}^{-1}\right)^t B_e C_{fe}^{-1}\,. \tag{14-4}$$

Отметим, что *определитель Грама* при замене базиса умножается на ненулевой квадрат:

$$\det B_f = \det B_e \cdot \det^2 C_{ef} = \det B_e / \det^2 C_{fe}\,. \tag{14-5}$$

14.1.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \to \Bbbk$ равносильно заданию линейного оператора

$$\beta : V \to V^*\,, \quad v \mapsto \beta(*, v)\,, \tag{14-6}$$

переводящего вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \beta(w, v)$. Этот оператор называется *правой корреляцией* билинейной формы β. Мы умышленно обозначили его той же буквой, что и форму — из контекста всегда понятно, что именно имеется в виду, а во многих случаях это даже и не важно.

Упражнение 14.1. Убедитесь, что матрица оператора $\beta : V \to V^*$ написанная в произвольном базисе e пространства V и двойственном базисе e^* пространства[1] V^*, равна матрице Грама B_e формы β в базисе e.

Если обозначить через $\langle\, * \,,\, * \,\rangle : V^* \times V \to \Bbbk$ спаривание векторов с ковекторами[2], то билинейная форма восстанавливается по своей правой корреляции как

$$\beta(u, w) = \langle\, \beta w \,,\, u \,\rangle\,.$$

Двойственный к β оператор[3] $\beta^* : V^{**} = V \to V$ связан с оператором β соотношением $\langle\, \beta^* u \,,\, w \,\rangle = \langle\, \beta w \,,\, u \,\rangle$, и задаёт билинейную форму

$$\beta^*(u, w) = \langle\, \beta^* w \,,\, u \,\rangle = \langle\, \beta u \,,\, w \,\rangle = \beta(w, u)\,,$$

получающуюся из формы β перестановкой аргументов. В терминах формы β оператор

$$\beta^* : V \to V^*\,, \quad v \mapsto \beta(v, *) \tag{14-7}$$

[1] j-тый столбец этой матрицы образован координатами вектора $\beta(e_j)$ в базисе e^*

[2] см. прим. 7.5 на стр. 107

[3] оператор $\varphi^* : W^* \to U^*$, двойственный к $\varphi : U \to W$, определяется тем, что $\forall\, \xi \in W^*\ \forall\, u \in U$ $\langle\, \varphi^* \xi \,,\, u \,\rangle = \langle\, \xi \,,\, fu \,\rangle$ (см. n° 7.3 на стр. 109)

переводит вектор $v \in V$ в линейную форму $w \mapsto \beta(v, w)$. Поэтому он называется *левой корреляцией* билинейной формы[1] β.

Упражнение 14.2. Убедитесь в том, что матрица левой корреляции в двойственных базисах e и e^* пространств V и V^* это транспонированная матрица Грама B_e^t формы β в базисе e.

Ненулевые двойственные корреляции (и соответствующие им формы) пропорциональны только при $\beta^* = \pm\beta$, поскольку равенства $\beta(u, w) = c\beta(w, u) = c^2\beta(u, w)$ при $\beta(u, w) \neq 0$ влекут $c = \pm 1$. Таким пропорциональным корреляциям отвечают *симметричные* формы $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ и кососимметричные формы $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$. Специальным свойствам (косо) симметричных форм будет посвящён раздел n° 14.4 ниже, отдельно симметричным формам — весь следующий §15. В этом же параграфе мы обсудим свойства, общие для всех билинейных форм.

14.1.3. Характеристический многочлен несимметричной формы. Будем называть формы $\beta(u, w) \neq \pm\beta(w, u)$ *несимметричными*. Каждая несимметричная билинейная форма β задаёт двумерное пространство корреляций, порождённое β и β^* и называемое *пучком корреляций* формы β . Мы обозначим его

$$\mathcal{C}_\beta = \{\lambda \cdot \beta^* + \varrho \cdot \beta \,:\, V \to V^* \mid \lambda, \varrho \in \Bbbk\} \subset \operatorname{Hom}(V, V^*)\,. \tag{14-8}$$

Можно воспринимать $\mathcal{C}_\beta$ как *пучок билинейных форм* $\lambda\beta(u, w) + \mu\beta(w, u)$. На $\mathcal{C}_\beta$ имеется каноническая инволюция, действующая на операторы сопряжением, а на формы — перестановкой аргументов, и переставляющая друг с другом координаты (λ, ϱ) относительно любого базиса в пучке, образованного парой сопряжённых корреляций. Определитель

$$\chi_\beta(\lambda, r) = \det\left(\lambda B_e^t + \varrho B_e\right) = \det\left(\lambda \cdot \beta^* + \varrho \cdot \beta\right) \tag{14-9}$$

называется *характеристическим многочленом* формы β. Это однородный многочлен степени $\dim V$ (возможно нулевой) от переменных (λ, ϱ). С точностью до умножения на ненулевые константы из $\Bbbk$ он не зависит от выбора базиса e в пространстве V и даже от выбора двух базисных операторов в пространстве $\mathcal{C}_\beta$. Выбор в качестве последних пары сопряжённых друг другу операторов предпочтителен тем, что получающийся в этом случае многочлен симметричен: $\chi_\beta(\lambda, \varrho) = \chi_\beta(\varrho, \lambda)$.

Будем называть несимметричную форму *регулярной*, если её характеристический многочлен (14-9) ненулевой. В этом случае его корни $\mu = \varrho : \lambda$ на проективной прямой[2] $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{C}_\beta)$ называются *характеристическими числами* формы β. В силу симметричности многочлена $\chi_\beta(\lambda, \varrho)$ характеристические числа разбиваются на пары обратных μ, μ^{-1}, и обратные друг другу корни имеют одинаковые кратности. Характеристическим значениям $\lambda : \varrho$ отвечают вырожденные операторы (14-8). Для регулярной формы β они образуют конечный набор из $\leqslant \dim V$ одномерных подпространств в $\mathcal{C}_\beta$. Все остальные операторы в $\mathcal{C}_\beta$ невырождены.

Упражнение 14.3. Покажите, что в пучке корреляций (14-8) есть ровно одна симметричная и ровно одна кососимметричная форма. Могут ли обе они быть вырождены, если несимметричная форма β невырождена?

[1]но является при этом *правой* корреляцией для формы β^*

[2]включая значения $\mu = 0 = 0 : 1$ и $\mu = \infty = 1 : 0$, возникающие, когда $\det(B_e) = 0$

14.1.4. Невырожденность билинейной формы β можно характеризовать многими способами.

Предложение 14.1 (критерии невырожденности)
Следующие условия на билинейную форму $\beta : V \times V \to \Bbbk$ с матрицей Грама B_e в некотором базисе $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V эквивалентны:

1) $\det B_e \neq 0$
2) для любого ненулевого $u \in V \ \exists\, w \in V : \beta(u, w) \neq 0$
3) левая корреляция $\beta^* : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом
4) любой ковектор $\xi : V \to \Bbbk$ представим в виде $\xi(v) = \beta(u_\xi, v)$ с $u_\xi \in V$
5) для любого ненулевого $w \in V \ \exists\, u \in V : \beta(u, w) \neq 0$
6) правая корреляция $\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ является изоморфизмом
7) любой ковектор $\xi : V \to \Bbbk$ представим в виде $\xi(v) = \beta(v, w_\xi)$ с $w_\xi \in V$.

В частности, если условие (1) выполнено для какого-то базиса e, то оно выполнено и для любого другого базиса, а векторы u_ξ и w_ξ в (4) и (7) однозначно определяются ковектором ξ (если существуют).

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, условия (2) и (4), означающие, соответственно, что $\ker \beta^* = 0$ и что $\operatorname{im} \beta = V^*$, равносильны условию (3). По той же причине эквивалентны друг другу и условия (5), (6), (7). Поскольку матрицы операторов β^* и β в двойственных друг другу базисах e и e^* суть B_e^t и B_e, невырожденность операторов β^* и β равносильна тому, что $\det B_e^t = \det B_e \neq 0$. □

Определение 14.1
Билинейные формы β, удовлетворяющие условиям предл. 14.1 называются *невырожденными* или *неособыми*. Все остальные билинейные формы называются *вырожденными* или *особыми*.

14.1.5. Ядра. Если форма β вырождена, то *обе* её корреляции имеют ненулевые ядра

$$\ker \beta = \{u \in V \mid \beta(v, u) = 0 \quad \forall\, v \in V\}$$
$$\ker \beta^* = \{u \in V \mid \beta(u, v) = 0 \quad \forall\, v \in V\},$$

называемые, соответственно, *правым* и *левым* ядром билинейной формы β. Вообще говоря, это *разные* подпространства в V, однако размерность у них одинакова, поскольку операторы β^* и β сопряжены друг другу и, стало быть, имеют одинаковый ранг[1].

Упражнение 14.4. Покажите, что форма β регулярна тогда и только тогда, когда её левое и правое ядра имеют нулевое пересечение.

[1]по-другому можно было бы сказать, что матрицы B_e^t и B_e этих операторов транспонированы друг другу, а значит, имеют равный ранг

14.2. Конструкции с невырожденными формами. Если билинейная форма β невырождена, то для любого базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V прообразы векторов двойственного базиса $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ пространства V^* относительно левой и правой корреляций образуют в V два базиса ${}^\vee e = ({}^\vee e_1, {}^\vee e_2, \dots, {}^\vee e_n)$ и $e^\vee = (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee)$, называемые *левым* и *правым* двойственными относительно формы β к исходному базису e, поскольку

$$\beta\left({}^\vee e_i, e_j\right) = \beta\left(e_i, e_j^\vee\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,. \end{cases} \tag{14-10}$$

Они выражаются через базис e по формулам ${}^\vee e = e\, B_e^{-1t}$ и $e^\vee = e\, B_e^{-1}$. Знание двойственного базиса позволяет раскладывать произвольный вектор $v \in V$ по базису e как

$$v = \sum_\nu \beta\left({}^\vee e_\nu, v\right) \cdot e_\nu = \sum_\nu \beta\left(v, e_\nu^\vee\right) \cdot e_\nu\,, \tag{14-11}$$

в чём легко убедиться применив к обеим частям функционалы $\beta\left({}^\vee e_\nu, *\right)$ и $\beta\left(*, e_\nu^\vee\right)$ соответственно.

14.2.1. Группа изометрий $\mathrm{O}_\beta(V)$ невырожденной билинейной формы β на пространстве V определяется как множество всех операторов $g : V \to V$, сохраняющих форму β в том смысле, что

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(gu, gw) = \beta(u, w)\,.$$

В терминах корреляций это означает равенство $g^*\beta g = \beta$, из которого вытекает, что $\det g \neq 0$. Поэтому каждая изометрия обратима, и обратный к изометрии g оператор $g^{-1} = \beta^{-1} g^* \beta$ также является изометрией.

Упражнение 14.5. Убедитесь в этом.

Так как композиции изометрий очевидно тоже являются изометриями, изометрии действительно образуют группу. В упр. 14.8 ниже изометрии формы β будут охарактеризованы как операторы, сопряжённые относительно формы β к своим обратным.

14.2.2. Биекция между формами и операторами. Если на пространстве V задана билинейная форма $\beta : V \times V \to \Bbbk$, то каждому линейному оператору $f : V \to V$ можно сопоставить корреляцию $\;= \beta \circ f : V \to V^*$ или билинейную форму $\beta f(u, w) = \beta(u, fw)$. Отображение

$$\operatorname{End} V \to \operatorname{Hom}(V, V^*)\,, \quad f \mapsto \beta f\,, \tag{14-12}$$

линейно и является изоморфизмом, если форма β невырождена, т. к. в этом случае каждая корреляция $\psi : V \to V^*$ имеет вид $\psi = \beta f$ для единственного оператора $f = \beta^{-1}\psi$. При изоморфизме (14-12) невырожденным операторам соответствуют невырожденные формы и наоборот.

14.2.3. Канонический оператор. Оператор $\varkappa = \beta^{-1}\beta^* : V \to V$, отвечающий при изоморфизме (14-12) левой корреляции β^*, т. е. такой что

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \varkappa w)\,, \tag{14-13}$$

называется *каноническим оператором* формы β. Если форма β невырождена, он существует и единствен. Мы будем писать $\varkappa_\beta$, когда надо уточнять, о какой форме β идёт речь. Матрица K_e оператора $\varkappa$ в произвольном базисе e пространства V выражается через матрицу Грама B_e формы β в этом базисе по формуле $K_e = B_e^{-1} B_e^t$.

Упражнение 14.6. Убедитесь прямым вычислением, что при замене матрицы Грама по формуле $B \mapsto C^t BC$ с $C \in \mathrm{GL}_n$ матрица $K = B^{-1} B^t$ меняется по формуле $K \mapsto C^{-1} KC$.

Канонический оператор является изометрическим, поскольку

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(u, w) = \beta(w, \varkappa u) = \beta(\varkappa u, \varkappa w)\,.$$

Характеристический многочлен канонического оператора

$$\chi_{\varkappa}(t) = \det(tE - B^{-1}B^t) = \det{}^{-1}(B) \cdot \det(tB + B^t) = \det{}^{-1}(B) \cdot \chi_{\beta}(1, t)$$

пропорционален ограничению характеристического многочлена $\chi_{\beta}(\lambda, \varrho) = \det(\lambda\beta^* + \varrho\beta)$ формы β на прямую $\lambda = 1$. Поэтому собственные числа канонического оператора в точности совпадают с характеристическими числами формы. На самом деле, имеет место более сильная

Теорема 14.1
Над алгебраическим полем $\Bbbk$ характеристики нуль две невырожденых билинейных формы на конечномерном векторном пространстве изометрически изоморфны тогда и только тогда, когда их канонические операторы подобны. □

Мы докажем её в n° 14.2.6 ниже, предварительно обсудив *сопряжение* операторов невырожденной билинейной формой, которое используется в доказательстве n° 14.2.6 и во многих других задачах линейной алгебры.

14.2.4. Сопряжение операторов. На пространстве V с невырожденной билинейной формой β каждому линейному оператору $f : V \to V$ можно сопоставить *правый сопряжённый оператор* $f^{\vee} = \beta^{-1} f^* \beta : V \to V$, получающийся сопряжением двойственного к f оператора $f^* : V^* \to V^*$ изоморфизмом $\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$, т. е. включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "f^*"] & V^* \\ V \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "f^{\vee}"] & V \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd} \tag{14-14}$$

На языке билинейных форм правый сопряжённый оператор однозначно определяется соотношением

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta(fu, w) = \beta(u, f^{\vee} w)\,. \tag{14-15}$$

Симметричным образом *левый сопряжённый* к f оператор ${}^{\vee}f = \left(b^*\right)^{-1} f^* \beta^* : V \to V$ задаётся соотношением

$$\forall\, u, w \in V \quad \beta({}^{\vee}fu, w) = \beta(u, fw) \tag{14-16}$$

и получается сопряжением двойственного к f оператора f^* левой корреляцией β^* формы β, т. е. включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "f^*"] & V^* \\ V \arrow[u, "\beta^*"] \arrow[r, "{}^{\vee}f"] & V \arrow[u, "\beta^*"'] \end{tikzcd} \tag{14-17}$$

Матрицы ${}^{\vee}F_e$ и $F_e^{\vee}$ операторов ${}^{\vee}f$ и $f^{\vee}$ в произвольном базисе e пространства V выражаются через матрицу F_e оператора f и матрицу Грама B_e формы φ по формулам

$$ {}^{\vee}F = \left(B_e^t\right)^{-1} F_e^t B_e^t \quad \text{и} \quad F^{\vee} = B_e^{-1} F_e B_e \,. \tag{14-18}$$

Упражнение 14.7. Покажите, что ${}^{\vee}\!\left(f^{\vee}\right) = f = \left({}^{\vee}f\right)^{\vee}$.

Равенства $\beta(fgu,w) = \beta(gu,f^{\vee}w) = \beta(u,g^{\vee}f^{\vee}w)$ и $\beta(u,fgw) = \beta({}^{\vee}fu,gw) = \beta({}^{\vee}g{}^{\vee}fu,w)$ показывают, что левое и правое сопряжения являются по отношению к композиции операторов *антигомоморфизмами*, т. е. $(fg)^{\vee} = g^{\vee}f^{\vee}$ и ${}^{\vee}(fg) = {}^{\vee}g{}^{\vee}f$.

Упражнение 14.8. Покажите, что оператор $g : V \to V$ тогда и только тогда является изометрией невырожденной билинейной формы β, когда он обратим и

$$ {}^{\vee}g = g^{\vee} = g^{-1}. $$

Предложение 14.2

На векторном пространстве V с невырожденной билинейной формой β следующие условия на линейный оператор $f : V \to V$ эквивалентны друг другу:

$$ 1)\ f^{\vee\vee} = f \qquad 2)\ {}^{\vee\vee}f = f \qquad 3)\ {}^{\vee}f = f^{\vee} \qquad 4)\ \varkappa f = f\varkappa \,. $$

Доказательство. Эквивалентность (1) $\iff$ (3) вытекает из упр. 14.7: беря в (3) правые сопряжённые, получаем (1), беря в (1) левые сопряжённые, получаем (3). Аналогично проверяется, что (2) $\iff$ (3). Переходя в обеих частях равенства (3)

$$ \left(\beta^*\right)^{-1} f^* \beta^* = \beta^{-1} f^* \beta $$

к двойственным операторам, получаем равенство $\beta f \beta^{-1} = \beta^* f \left(\beta^*\right)^{-1}$, эквивалентное равенству (4), утверждающему, что $\beta^{-1}\beta^* f = f \beta^{-1}\beta^*$. □

14.2.5. Рефлексивные операторы. Мы будем называть операторы $f : V \to V$, удовлетворяющие условиям предл. 14.2, *рефлексивными* относительно формы β. Рефлексивные операторы образуют в $\mathrm{End}(V)$ подалгебру — централизатор канонического оператора $\varkappa_\beta$. Рефлексивный оператор f называется *самосопряжённым*, если $f^{\vee} = f$, и *антисамосопряжённым* — если $f^{\vee} = -f$. Всякий рефлексивный оператор является суммой самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов: $f = (f + f^{\vee})/2 + (f - f^{\vee})/2$.

Предложение 14.3

Невырожденные формы α и β на пространстве V тогда и только тогда имеют равные канонические операторы $\varkappa_\alpha = \varkappa_\beta$, когда $\alpha = \beta f$ для некоторого самосопряжённого относительно обеих форм невырожденного линейного оператора[1] $f : V \to V$.

Доказательство. Равенство канонических операторов $\beta^{-1}\beta^* = \alpha^{-1}\alpha^*$ равносильно равенству двойственных им операторов $\beta\left(\beta^*\right)^{-1} = \alpha\left(\alpha^*\right)^{-1}$. Если они выполняются, то оператор $f = \beta^{-1}\alpha = \left(\beta^*\right)^{-1}\alpha^*$ перестановочен с $\varkappa_\alpha = \varkappa_\beta$, поскольку $f\varkappa_\alpha = \beta^{-1}\alpha^*\varkappa_\beta f$, и удовлетворяет равенству $\alpha = \beta f$. Наоборот, если $\alpha = \beta f$ и f самосопряжён относительно β, т. е. $f = f^{\vee} = \beta^{-1}f^*\beta$, то $\varkappa_\alpha = \alpha^{-1}\alpha^* = f^{-1}\beta^{-1}f^*\beta^* = f^{-1}f^{\vee}\beta^{-1}\beta^* = \beta^{-1}\beta^* = \varkappa_\beta$. □

[1] т. е. $\forall\, u,w \in V\ \alpha(u,w) = \beta(u,fw)$, см. n° 14.2.2 на стр. 218

14.2.6. Доказательство теор. 14.1. Если $\alpha(u,w) = \beta(gu,gw)$ для некоторого линейного изоморфизма $g : V \xrightarrow{\sim} V$, то матрицы Грама A и B форм α и β связаны с матрицей G оператора g соотношением $A = G^t B G$, откуда $K_\alpha = A^{-1}A^t = G^{-1}B^{-1}B^t G = G^{-1}K_\beta G$. Наоборот, пусть формы α и β имеют подобные канонические операторы $K_\alpha = G^{-1}K_\beta G$. Заменяя форму β изоморфной ей формой $\beta'(u,w) = \beta(gu,gw)$, мы можем и будем считать, что α и β имеют один и тот же канонический оператор. Тогда по предл. 14.3 $\alpha(u,w) = \beta(u,fw)$ для некоторого невырожденного линейного оператора $f : V \xrightarrow{\sim} V$, самосопряжённого относительно формы β. Согласно лем. 14.1, котрую мы докажем ниже, можно подобрать такой многочлен $p(x) \in \Bbbk[x]$, что оператор $h = p(f)$ имеет $h^2 = f$. Оператор h тоже самосопряжён относительно β, поскольку $h^\vee = p(f)^\vee = p(f^\vee) = p(f) = h$, и переводит форму b в форму α, так как $\alpha(u,w) = \beta(u,fw) = \beta(u,h^2w) = \beta(hu,hw)$. Это доказывает теор. 14.1.

Лемма 14.1
Над алгебраическим полем $\Bbbk$ характеристики нуль для любого оператора f с нулевым ядром, действующего на конечномерном векторном пространстве, существует такой многочлен $p(x) \in \Bbbk[x]$, что $p(f)^2 = f$.

Доказательство. Можно считать, что f является оператором умножения на t в прямой сумме фактор колец вида $\Bbbk[t]/(t-\lambda)^m$ с $\lambda \neq 0$. Обозначим через m_λ максимальный из показателей элементарных делителей оператора f вида $(t-\lambda)^m$ с данным $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Полагая $s = t - \lambda$ и беря первые m_λ членов формального биномиального разложения[1]

$$\sqrt{t} = \sqrt{\lambda + s} = \lambda^{1/2} \cdot \sqrt{1 + \lambda^{-1/2}s} = \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}\,s - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}\,s^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}\,s^3 - \cdots,$$

где $\lambda^{1/2} \in \Bbbk$ — один из двух корней уравнения $x^2 = \lambda$, получаем в правой части такой многочлен $p_\lambda(t)$, что $p_\lambda^2(t) \equiv t \,(\mathrm{mod}\,(t-\lambda)^{m_\lambda})$. По китайской теореме об остатках из многочленов $p_\lambda(t)$ можно изготовить один многочлен $p(t)$, такой что сравнения

$$p^2 \equiv t \,(\mathrm{mod}\,(t-\lambda)^{m_\lambda})$$

будут выполнены одновременно для всех $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Тем самым, $p^2(f) = f$. □

Замечание 14.1. Над незамкнутыми полями теор. 14.1 неверна. Например, над полем $\mathbb{Q}$ имеется огромное число невырожденных форм с тождественным каноническим оператором[2], и полное их перечисление выглядит необозримо трудной задачей. В следующем параграфе мы опишем классы изоморфных симметричных билинейных форм над полем $\mathbb{R}$ и над простыми конечными полями $\mathbb{F}_p$, а также дадим более геометрическое доказательство тому, что над алгебраически замкнутым полем в каждой размерности имеется единственная с точностью до изоморфизма невырожденная симметричная билинейная форма. С кососимметричными формами, для которых $\varkappa = -\mathrm{Id}_V$, дела обстоят намного проще, и в n° 14.5 ниже мы покажем, что над любым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$ в каждой чётной размерности имеется единственная с точностью до изоморфизма невырожденная кососимметричная форма, а в нечётных размерностях невырожденных кососимметричных форм не существует.

[1] см. формулу (4-23) на стр. 59
[2] т. е. невырожденных *симметричных* билинейных форм

14.3. Ортогоналы и ортогональные проекции. Для подпространства U в векторном пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \to \Bbbk$ обозначим через

$$ {}^{\perp}U = \{v \in V \mid \forall\, u \in U\ \beta(v,u) = 0\}\,, \tag{14-19}$$
$$ U^{\perp} = \{v \in V \mid \forall\, u \in U\ \beta(u,v) = 0\} \tag{14-20}$$

левый и *правый ортогоналы* к U. Вообще говоря, это *разные* подпространства в V .

Предложение 14.4
Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^{\perp}U = \dim V - \dim U = \dim U^{\perp} \quad \text{и} \quad \left({}^{\perp}U\right)^{\perp} = U = {}^{\perp}\left(U^{\perp}\right)\,.$$

Доказательство. Первые два равенства вытекают из того, что левый и правый ортогоналы (14-19) и (14-20) являются прообразами подпространства $\operatorname{Ann} U \subset V^*$ при изоморфизмах $\beta^* : V \xrightarrow{\sim} V^*$ и $\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$, задаваемых левой и правой корреляциями (??) формы β, и того, что $\dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$ по предл. 7.2 на стр. 107. Вторые два равенства верны, поскольку U содержится в подпространствах $\left({}^{\perp}U\right)^{\perp}$ и ${}^{\perp}\left(U^{\perp}\right)$, а их размерность по предыдущему равна $\dim U$. □

Предложение 14.5
Если ограничение формы β на конечномерное подпространство $U \subset V$ невырождено, то $V = U^{\perp} \oplus U$ и для произвольного вектора $v \in V$ его проекция ${}_{U}v$ на U вдоль $U^{\perp}$ однозначно определяется тем, что $\forall\, u \in U \quad \beta(u,v) = \beta(u, v_U)$. Она вычисляется в терминах произвольной пары двойственных относительно формы β базисов пространства U по формуле

$$v_U = \sum_i \beta\left({}^{\times}u_i, v\right) \cdot u_i\,.$$

Симметричным образом, имеется прямое разложение $V = U \oplus {}^{\perp}U$ в котором проекция ${}_{U}v$ произвольного вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^{\perp}U$ однозначно определяются тем, что

$$\forall\, u \in U \quad \beta(v,u) = \beta({}_{U}v, u)\,,$$

и вычисляется в терминах произвольной пары двойственных относительно формы β базисов пространства U по формуле ${}_{U}v = \sum \beta\left(v, u_i^{\vee}\right) \cdot u_i$.

Доказательство. Коль скоро ограничение формы β на U невырождено, для любого $v \in V$ линейная форма $\beta(v) : u \mapsto \beta(u,v)$ на подпространстве U имеет вид скалярного умножения справа на некоторый вектор $v_U \in U$, который однозначно определяется по v. Тем самым, $\forall\, u \in U$ выполняется равенство $\beta(u,v) = \beta(u,v_U)$, равносильное равенству $\beta(u, v - v_U) = 0$, и любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение

$$v = (v - v_U) + v_U\,, \quad \text{где} \quad v_U \in U \quad \text{и} \quad v - v_U \in U^{\perp}\,.$$

Стало быть, $V = U^{\perp} \oplus U$. Поскольку $\beta({}^{\vee}u_i, v) = \beta({}^{\vee}u_i, v_U)$, разложение (14-11) имеет для вектора v_U вид $v_U = \sum \beta\left({}^{\vee}u_i, v_U\right) \cdot u_i = \sum \beta\left({}^{\vee}u_i, v\right) \cdot u_i$. Доказательства для левого ортогонала полностью симметричны. □

Упражнение 14.9. В условиях предл. 14.5 убедитесь, что отображения $V \twoheadrightarrow U$, заданные правилами $v \mapsto {}_U v$ и $v \mapsto v_U$, а также отображения $V \twoheadrightarrow {}^\perp U$ и $V \twoheadrightarrow U^\perp$, заданные правилами $v \mapsto v - {}_U v$ и $v \mapsto v - v_U$, линейны и сюрьективны (здесь и далее ${}_U v$ и v_U означают проекции вектора v на U вдоль ${}^\perp U$ и $U^\perp$ соответственно).

Следствие 14.1

Если и сама билинейная форма β на конечномерном пространстве V и её ограничение на подпространство $U \subset V$ оба невырождены, то и ограничения формы β на левый и на правый ортогоналы ${}^\perp U$ и $U^\perp$ к подпространству U также невырождены, а проекции

$$v_{\perp U} \overset{\text{def}}{=} v - v_U \quad \text{и} \quad {}_{U^\perp} v \overset{\text{def}}{=} v - {}_U v$$

произвольного вектора $v \in V$ на ${}^\perp U$ и на $U^\perp$ вдоль U в прямых разложениях

$$U \oplus {}^\perp U = V = U^\perp \oplus U$$

однозначно определяются свойствами

$$\forall\, w \in {}^\perp U \;\; \beta(w, v) = \beta(w, v_{\perp U}) \quad \text{и} \quad \forall\, w \in U^\perp \;\; \beta(v, w) = \beta({}_{U^\perp} v, w)\,.$$

Доказательство. Для любого вектора $w \in U^\perp$ найдётся вектор $v \in V$ с $\beta(v, w) \neq 0$. Раскладывая его как $v = {}_U v + {}_{U^\perp} v$, где ${}_U v \in U$, ${}_{U^\perp} v = v - {}_U v \in U^\perp$, и пользуясь равенством $\beta({}_U v, w) = 0$, заключаем, что $\beta({}_{U^\perp} v, w) = \beta(v, w) \neq 0$. Стало быть, ограничение формы β на $U^\perp$ невырождено. То же вычисление показывает, что $\beta(v, w) = \beta({}_{U^\perp} v, w)$ для всех $w \in U^\perp$, откуда по предл. 14.5, применённой к подпространству $U^\perp$ в качестве U, мы заключаем, что ${}_{U^\perp} v$ является проекцией v на $U^\perp$ вдоль ${}^\perp\!\left(U^\perp\right) = U$ в прямом разложении $V = {}^\perp\!\left(U^\perp\right) \oplus U^\perp = U \oplus U^\perp$. Утверждения про левый ортогонал проверяются симметричным образом. □

Следствие 14.2

В условиях предыдущего сл. 14.1 ограничение на подпространство ${}^\perp U \subset V$ проекции пространства V на $U^\perp$ вдоль U и ограничение на подпространство $U^\perp \subset V$ проекции пространства V на ${}^\perp U$ вдоль U являются взаимно обратными изометрическими изоморфизмами между левым и правым ортогоналами к U. Эти изоморфизмы переводят друг в друга проекции $v_{\perp U}$ и ${}_{U^\perp} v$ любого вектора $v \in V$ на ${}^\perp U$ и на $U^\perp$ вдоль U.

Доказательство. Линейный оператор $U^\perp \to {}^\perp U$, заданный правилом $w \mapsto w_{\perp U} = w - w_U$, изометричен, т. к. для любых двух векторов $w', w'' \in U^\perp$

$$\beta(w' - w'_U, w'' - w''_U) = \beta(w', w'') - \beta(w', w''_U) + \beta(w'_U, w''_U) = \beta(w', w'')$$

в силу равенств $\beta(w'_U, w'') = 0$ и $\beta(w', w''_U) = \beta(w'_U, w''_U)$, первое из которых выполняется, поскольку $w'_U \in U$, а $w'' \in U^\perp$, а второе — поскольку $\beta(w', u) = \beta(w'_U, u)$ для всех u из U, включая $u = w''_U$. Изометричность оператора ${}^\perp U \xrightarrow{\sim} U^\perp$ устанавливается аналогично. Поскольку обе проекции $v \mapsto {}_U v$ и $v \mapsto v_U$ тождественно действуют на U, для любого вектора $v \in V$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \left({}_{U^\perp} v\right)_{\perp U} &= \left(v - {}_U v\right) - \left(v - {}_U v\right)_U = v - {}_U v - v_U + {}_U v = v - v_U = v_{\perp U}\,, \\ {}_{U^\perp}\!\left(v_{\perp U}\right) &= \left(v - v_U\right) - {}_U\!\left(v - v_U\right) = v - v_U - {}_U v + v_U = v - {}_U v = {}_{U^\perp} v\,, \end{aligned}$$

из которых вытекают все остальные утверждения доказываемого следствия. □

14.4. (Косо)симметричные формы. Билинейная форма β на пространстве V называется *симметричной*, если $\forall\, v, w \in V\ \beta(v, w) = \beta(w, v)$, т. е. $\varkappa_\beta = \mathrm{Id}_V$ и $\beta^* = \beta$. Форма β называется *кососимметричной*, если $\forall\, v, w \in V\ \beta(v, w) = -\beta(w, v)$, т. е. $\varkappa_\beta = -\mathrm{Id}_V$ и $\beta^* = -\beta$.

Упражнение 14.10. Покажите, что если $\forall\, v{\in}V\ \beta(v, v) = 0$, то форма β кососимметрична, а при $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ верно и обратное.

На языке матриц (косо) симметричность формы означает (косо) симметричность её матрицы Грама в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе. Произвольная билинейная форма β однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной:

$$\beta(v, w) = \beta_+(v, w) + \beta_-(v, w)\,, \quad \text{где}$$
$$\beta_+(v, w) = (\beta(v, w) + \beta(w, v))/2\,, \quad \beta_-(v, w) = (\beta(v, w) - \beta(w, v))/2\,,$$

т. е. пространство билинейных форм на V является прямой суммой подпространств симметричных и кососимметричных форм или, эквивалентно, $\mathrm{Hom}(V, V^*) = \mathrm{Hom}_+(V, V^*) \oplus \mathrm{Hom}_-(V, V^*)$ является прямой суммой собственных подпространств, отвечающих собственным числам $+1$ и -1 инволютивного оператора дуализации $* : \beta \to \beta^*$.

Упражнение 14.11. Вычислите $\dim \mathrm{Hom}_\pm(V, V^*)$ при $\dim V = n$.

14.4.1. Сопряжение операторов. Поскольку канонический оператор $\varkappa = \pm\mathrm{Id}_V$ (косо) симметричной формы лежит в центре алгебры $\mathrm{End}\, V$, все операторы $f : V \to V$ рефлексивны. В частности, левый и правый сопряжённые к любому оператору f совпадают друг с другом: $f^\vee = \beta^{-1} f^* \beta = (\beta^*)^{-1} f^* \beta^* = {}^\vee f$ и определяются эквивалентными друг другу соотношениями $\beta(fu, w) = \beta(u, f^\vee w)$ и $\beta(f^\vee u, w) = \beta(u, fw)$, а дважды сопряжённый оператор совпадает с исходным: $f^{\vee\vee} = f$. Самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы определяются, соответственно, равенствами

$$\beta(fu, w) = \beta(u, fw) \quad \text{и} \quad \beta(fu, w) = -\beta(u, fw) \qquad (\forall\, u, w \in V)$$

и являются собственными векторами с собственными значениями ± 1 инволюции

$$\vee : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)\,, \quad f \mapsto f^\vee$$

сопряжения относительно формы β. Согласно прим. 11.1 на стр. 169 пространство $\mathrm{End}(V)$ является прямой суммой собственных ± 1-подпространств этой инволюции, т. е. каждый оператор $f : V \to V$ однозначно представляется в виде суммы самосопряжённого и антисамосопряжённого: $f = (f + f^\vee)/2 + (f - f^\vee)/2$.

14.4.2. Ортогоналы и проекции. Если форма β на V (косо) симметрична, то левый ортогонал к любому подпространству $U \subset V$ совпадает с правым:

$$^\perp U = U^\perp = \{ w \in V \mid \beta(w, u) = \pm\beta(u, w) = 0 \ \ \forall\, u{\in}U \}\,.$$

Если ограничение (косо) симметричной формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено, то по сл. 14.1 $V = U \oplus U^\perp$. Подпространство $U^\perp$ называется в этом случае *ортогональным дополнением* к подпространству U. Проекция $v_U = {}_U v$ вектора $v \in V$ на U вдоль $U^\perp$ называется *ортогональной проекцией* на U и однозначно определяется тем, что

$$\forall\, u \in U\ \beta(u, v) = \beta(u, v_U)\,.$$

Если форма β невырождена на всём V, то согласно предл. 14.5 $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ и $U^{\perp\perp} = U$ для всех подпространств $U \subset V$. Если при этом ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ также невырождено, то по сл. 14.1 невырождено и ограничение формы на $U^{\perp}$. Отметим, однако, что ограничение невырожденной (косо) симметричной формы на подпространство вполне может оказаться вырожденным и даже тождественно нулевым.

14.4.3. Изотропные подпространства. Подпространства $U \subset V$, на которые форма β ограничивается в тождественно нулевую форму, называются *изотропными подпространствами* формы β. Например, любое одномерное подпространство изотропно для любой кососимметричной формы (если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$).

Предложение 14.6

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не может превосходить $\dim V/2$.

Доказательство. Изотропность подпространства $U \subset V$ означает, что корреляция $\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ отображает U внутрь $\operatorname{Ann} U \subset V^*$. Поскольку корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leqslant \dim \operatorname{Ann} U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leqslant \dim V$. □

14.4.4. Ядро (косо) симметричной формы. Левое и правое ядра (косо) симметричной формы β совпадают друг с другом. Это подпространство называется просто *ядром* формы β и обозначается $\ker \beta = {}^{\perp}V = V^{\perp} = \{w \in V \mid \forall\, v \in V \;\; \beta(w,v) = \pm\beta(v,w) = 0\}$.

Предложение 14.7

Ограничение (косо) симметричной формы β на любое дополнительное к её ядру подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть $U \subset V$ таково, что $V = \ker \beta \oplus U$. Если $w \in U$ лежит в ядре ограничения $\beta|_U$, т. е. удовлетворяет $\forall\, u \in U$ соотношению $\beta(w,u) = 0$, то записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$ с $e \in \ker \beta$, $u \in U$ мы получим $\beta(w,v) = \beta(w,e) + \beta(w,u) = 0$, т. е. $w \in U \cap \ker \beta = 0$. □

Упражнение 14.12. Покажите, что для произвольных форм предложение неверно. Точнее, проверьте, что если $V = \ker \beta^* \oplus U = \ker \beta^{\wedge} \oplus W$, то ограничение левой корреляции $\beta^* : V \to V^*$ на подпространство U устанавливает изоморфизм U с W^*, а не с U^*.

Всюду далее мы предполагаем, что $\operatorname{char}(\Bbbk) \neq 2$.

14.5. Симплектические пространства. Прямая сумма $V^* \oplus V$, наделённая кососимметричной билинейной формой

$$\omega\big((\xi_1, v_1), (\xi_2, v_2) \big) = \langle\, \xi_1 \,,\, v_2 \,\rangle - \langle\, \xi_2 \,,\, v_1 \,\rangle \,, \tag{14-21}$$

называется *симплектическим пространством* и обозначается Ω_{2n}, где $n = \dim V$. В базисе, составленном из векторов $e_1, e_2, \dots, e_n, e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ каких-нибудь двойственных друг другу базисов в V и в V^*, матрица Грама формы ω имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} . \tag{14-22}$$

Матрица J называется *симплектической единицей* и удовлетворяет соотношениям $J^2 = -E$, $\det J = 1$. В частности, форма ω невырождена. Базис, в котором матрица Грама невырожденной кососимметричной формы имеет вид (14-22), называется *симплектическим базисом* этой формы. Прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \oplus \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

Теорема 14.2
Над произвольным полем $\Bbbk$ любое пространство V с невырожденной кососимметричной формой ω изометрически изоморфно симплектическому пространству. В частности, размерность $\dim V$ чётна.

Доказательство. В качестве первого базисного вектора возьмём произвольный ненулевой вектор $e_1 \in V$. Поскольку ω невырождена, существует $w \in V$, такой что $\omega(e_1, w) = a \neq 0$. Положим $e_2 = w/a$. Матрица Грама ограничения ω на двумерное подпространство $U \subset V$, порождённое векторами e_1, e_2, равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $\omega|_U$ невырождена, $V = U \oplus U^\perp$, ограничение $\omega|_{U^\perp}$ также невырождено, и мы можем воспользоваться индукцией по размерности. □

Упражнение 14.13. Убедитесь непосредственно, что определитель кососимметричной квадратной матрицы нечётного размера равен нулю.

14.5.1. Симплектическая группа $\mathbf{Sp}_\omega(V)$. Изометрические линейные преобразования $F : V \to V$ невырожденной симплектической формы ω на $2n$-мерном пространстве V называются *симплектическими* и образуют группу $\mathrm{Sp}_\omega(V)$, называемую *симплектической группой* формы ω. Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\mathrm{Sp}_\omega(V)$ на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) = \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\Bbbk) \mid F^t \cdot J \cdot F = J\}.$$

14.5.2. Лагранжевы и симплектические подпространства. Изотропные подпространства максимальной размерности n в $2n$-мерном симплектическом пространстве V с формой ω называются *лагранжевыми.*

Упражнение 14.14. Покажите, что каждое изотропное подпространство симплектической формы содержится в некотором лагранжевом, а каждое лагранжево подпространство совпадает со своим ортогоналом.

Предложение 14.8
Каждое изотропное подпространство U невырожденной кососимметричной формы ω содержится в некотором симплектическом подпространстве W размерности $\dim W = 2\dim U$, и любой базис в U дополняется до симплектического базиса в W.

Доказательство. Выберем в U базис $u_1, u_2, \dots, u_m$, дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный к нему относительно ω базис. Первые m векторов $u_1^\vee, u_2^\vee, \dots, u_m^\vee$ двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega\left(u_i, u_j^\vee\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j\,, \end{cases} \tag{14-23}$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов $u_j^\vee$ любой линейной комбинации векторов u_i. Заменяя каждый вектор $u_j^\vee$ вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{\nu<j} \omega\left(u_j^\vee, u_\nu^\vee\right) \cdot u_\nu\,, \tag{14-24}$$

получаем набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m$, также удовлетворяющий равенствам (14-23), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех i, j

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0\,.$$

Таким образом, векторы u_i и w_j с $1 \leqslant i, j \leqslant m$ составляют симплектический базис своей линейной оболочки. □

Следствие 14.3 (из доказательства предл. 14.8)
Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ имеется дополнительное лагранжево подпространство $L' \subset V$, такое что $V = L \oplus L'$. Каждый базис e подпространства L однозначно достраивается некоторым базисом e' подпространства L' до симплектического базиса пространства V. При фиксированном L' все дополнительные к L лагранжевы подпространства L'' биективно соответствуют антисамосопряжённым[1] относительно формы ω линейным операторам $f : L \to L'$.

Доказательство. Беря в предыдущем доказательстве $U = L$ и $u = e$ получаем разложение $W = V = L \oplus L'$, в котором лагранжево подпространство L' натянуто на векторы w_j из формулы (14-24). Корреляция $\widehat{\omega} : v \mapsto \omega(*, v)$ задаёт изоморфизм подпространства L' с пространством L^* и базис w в L', дополняющий базис e пространства L до симплектического базиса в V, однозначно описывается как прообраз двойственного к e базиса e^* в L^* при этом изоморфизме. Всякое дополнительное к L подпространство $L'' \subset L \oplus L'$ биективно проектируется на L вдоль L', т. е. для любого $u \in L$ существует единственный вектор $f(u) \in L'$, такой что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L \to L'$, графиком которого является L''. Изотропность подпространства L'' равносильна антисамомопряжённости оператора f, поскольку $\omega\left(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)\right) = \omega\left(u_1, f(u_2)\right) + \omega\left(f(u_1), u_2\right)$ в силу лагранжевости подпространств $L \ni u_1, u_2$ и $L' \ni f(u_1), f(u_2)$. □

Упражнение 14.15. Покажите, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}_\omega(V)$ транзитивно действует на множестве всех симплектических подпространств $W \subset V$ каждой фиксированной размерности $\dim W = 2d$ и на множестве всех изотропных подпространств $U \subset V$ каждой фиксированной размерности $\dim U = d$ (в обоих случаях $1 \leqslant d \leqslant \dim V/2$).

14.5.3. Пфаффиан. Рассмотрим имеющие $i < j$ элементы a_{ij} кососимметричной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $(2n)\times(2n)$ как независимые переменные и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов от этих переменных с целыми коэффициентами. Покажем, что существует единственный такой многочлен $\mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, что

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{Pf}(J') = 1\,,$$

[1] т. е. таким операторам f, что $\forall\, u, w\ \omega(fu, w) + \omega(u, fw) = 0$

где J' — блочно диагональная матрица, составленная из 2×2-блоков $\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}$. Многочлен $\mathrm{Pf}(A)$ называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы A и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}=\\=\{1,2,\dots,2n\}}} \mathrm{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big)\cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \,\cdots\, a_{i_n j_n}\,, \tag{14-25}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1,\,2,\,\dots\,,\,2n\}$ в объединение n непересекающихся пар $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок которых не существенен, а sgn означает знак соответствующей перестановки[1].

Упражнение 14.16. Проверьте эту формулу для кососимметричных матриц размеров 2×2 и 4×4.

Чтобы установить существование пфаффиана, проинтерпретируем матрицу A как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы на координатном векторном пространстве K^{2n} над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. По теор. 14.2 эта форма обладает симплектическим базисом. Перегруппировывая его векторы по парам $e_1,\, e_1^*,\, e_2,\, e_2^*,\,\dots\,,\, e_n,\, e_n^*$, получаем базис с матрицей Грама J'. Это означает, что $A = C\cdot J'\cdot C^t$ для некоторой матрицы $C\in \mathrm{GL}_{2n}(K)$. Поскольку $\det J' = 1$,

$$\det(A) = \det(C)^2\,.$$

Дабы удостовериться, что $\det C = \mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, введём для кососимметричной матрицы $B = \big(b_{ij}\big)$, элементы которой также рассматриваются как независимые переменные, вспомогательный однородный грассманов многочлен второй степени

$$\beta_B(\xi) = (\xi B)\wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij}\xi_i\wedge\xi_j$$

от n переменных $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$. Так как чётные мономы $\xi_i\wedge\xi_j$ перестановочны, $\beta_B^n = \beta_B\wedge\beta_B\wedge\dots\wedge\beta_B = n!\cdot\mathrm{Pf}(B)\cdot\xi_1\wedge\xi_2\wedge\,\cdots\,\wedge\xi_{2n}$, где

$$\mathrm{Pf}(B) = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}=\\=\{1,2,\dots,2n\}}} \mathrm{sgn}\big(i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n\big)\cdot b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \,\cdots\, b_{i_n j_n} \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$$

тот же, что и формуле (14-25). При линейной замене координат ξ на координаты η, через которые ξ выражаются при помощи предыдущей матрицы C по формуле $\xi = \eta\, C$, грассманов многочлен $\beta_B(\xi)$ преобразуется в грассманов многочлен

$$\beta_B(\xi) = (\xi\, B)\wedge\xi^t = (\eta\, CB)\wedge(\eta\, C)^t = (\eta\, CBC^t)\wedge\eta^t = \beta_{CBC^t}(\eta)\,,$$

с коэффициентами в кольце $K[b_{ij}]$. Его n-тая внешняя степень имеет вид

$$\beta_{CBC^t}(\eta)^n = n!\cdot\mathrm{Pf}(CBC^t)\cdot\eta_1\wedge\eta_2\wedge\,\cdots\,\wedge\eta_{2n}\,.$$

[1] убедитесь, что правая часть не меняется ни при перестановках пар друг с другом, ни при перестановке элементов в каждой паре

Поскольку $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_{2n} = \det C \cdot \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_{2n}$, многочлены $\mathrm{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ и $\mathrm{Pf}(CBC^t) \in K[b_{ij}]$ связаны соотношением $\mathrm{Pf}(CBC^t) = \mathrm{Pf}(B) \cdot \det C$. Полагая в нём $B = J'$, видим, что $\det C = \mathrm{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$ и $\det(A) = \det^2(C) = \mathrm{Pf}^2(A)$, что доказывает существование пфаффина и формулу (14-25). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен $x^2 - \det A = \big(x - \mathrm{Pf}(A)\big)\big(x + \mathrm{Pf}(A)\big) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$ имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm\,\mathrm{Pf}(A)$, а требование $\mathrm{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует знак.

Упр. 14.7. ${}^{\vee}\!\left(f^{\vee}\right) = \left(\beta^{*}\right)^{-1}\left((\beta)^{-1} f^{*} \beta\right)^{*} \beta^{*} = f$, т. к. $\beta^{**} = \beta$ и $f^{**} = f$.

Упр. 14.8. Условие $\forall\, u, w \in V\ \beta(u, w) = \beta(gu, gw)$ равносильно равенству $g^{*}\beta g = \beta$, которое влечёт $\det g \neq 0$ и эквивалентно равенству $\beta^{-1} g^{*} \beta = g$. Двойственное к последнему равенство $\beta^{*} g \left(\beta^{*}\right)^{-1} = g^{*}$ в свою очередь равносильно равенству $\left(\beta^{*}\right)^{-1} g^{*} \beta^{*} = g$.

Упр. 14.10. Первое следует из равенства $\beta(v + w, v + w) = \beta(v, v) + \beta(w, w) + \beta(v, w) + \beta(w, v)$, второе — из равенства $\beta(v, v) = -\beta(v, v)$.

Упр. 14.11. Это размерности пространств симметричных и кососимметричных матриц размера $n \times n$, равные $n(n \pm 1)/2$.

Упр. 14.13. $\det \omega = \det(-\omega^{t}) = (-1)^{\dim V} \det \omega^{t} = (-1)^{\dim V} \det \omega$.