

# Упражнения 1. Вилсоновский подход к ренормированной теории

( Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **13.02.14**  
на e-mail: grigory@princeton.edu )

В этом листке мы будем изучать как интегрирование по быстрым переменным модифицирует действие (задача идет по ходу главы 12 ПШ). Итак мы имеем следующую статистическую сумму

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi_0]_{\Lambda} e^{-\int \mathcal{L}(\phi_0)} = \int [\mathcal{D}\phi_0]_{\Lambda} \exp \left( - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_0^4 \right] \right), \quad (0.1)$$

где  $[\mathcal{D}\phi_0]_{\Lambda} = \prod_{|k| < \Lambda} d\phi_0(k)$ . Теперь мы разбиваем переменные интегрирования на две группы. Выбираем  $L > 1$ , тогда быстрые переменные есть

$$\tilde{\phi}(k) = \begin{cases} \phi_0(k), & \Lambda/L \leq k < \Lambda; \\ 0, & k < \Lambda/L. \end{cases} \quad (0.2)$$

А для медленных переменных  $\phi_1$  имеем:

$$\phi_1(k) = \begin{cases} 0, & k \geq \Lambda/L; \\ \phi_0(k), & k < \Lambda/L. \end{cases} \quad (0.3)$$

○ **1.** Покажите, что теперь статистическую сумму можно переписать как

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi_1]_{b\Lambda} e^{-\int \mathcal{L}(\phi_1)} \int [\mathcal{D}\tilde{\phi}] \exp \left( - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \tilde{\phi}^2 + \lambda \left( \frac{1}{6} \phi_1^3 \tilde{\phi} + \frac{1}{4} \phi_1^2 \tilde{\phi}^2 + \frac{1}{6} \phi_1 \tilde{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \tilde{\phi}^4 \right) \right] \right).$$

○ **2.** Покажите, что так как  $m^2 \ll \Lambda^2$ , пропагатор для быстрых полей равен

$$\langle \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(p) \rangle = \frac{1}{k^2} (2\pi)^d \delta^{(d)}(k+p) \Theta(k), \quad \text{где} \quad \Theta(k) = \begin{cases} 1, & \Lambda/L \leq k < \Lambda; \\ 0, & k < \Lambda/L. \end{cases} \quad (0.4)$$

○ **3.** Если выполнить интегрирование по быстрому полю  $\tilde{\phi}$ , то мы получим эффективное действие для медленного поля  $\phi_1$ :

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi_1]_{\Lambda/L} e^{-\int \mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi_1)}. \quad (0.5)$$

Найдите поправку порядка  $\lambda$  к массовому члену, а также поправку порядка  $\lambda^2$  к члену  $\frac{\lambda}{4!} \phi_1^4$ . Вычислите данные поправки при  $d \rightarrow 4$ .