# Упражнения 10

( Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **15.07.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu )

**Упражнение 1:** Покажите, что волновой функционал $\Psi_0[\chi(\vec{x})] = \langle\{\chi(\vec{x})\}|0\rangle$ основного состояния дается функциональным интегралом

$$\Psi_0[\chi(\vec{x})] = \int^{\varphi(\vec{x},0)=\chi(\vec{x})} D\varphi(x) e^{-\mathcal{A}[\varphi]_{x_4<0}}. \tag{1}$$

Далее покажите, что волновой функционал состояния $|\varphi(\vec{x},-\tau)\rangle = \hat{\varphi}(\vec{x},-\tau)|0\rangle$ равен

$$\Psi[\chi(\vec{x})] = \langle\{\chi(\vec{x})\}|\varphi(\vec{x},-\tau)\rangle = \int^{\varphi(\vec{x},0)=\chi(\vec{x})} D\varphi(x)\varphi(\vec{x},-\tau)e^{-\mathcal{A}[\varphi]}. \tag{2}$$

**Упражнение 2:** Используя операторный формализм, покажите, что

$$[\hat{A}_f, \hat{A}_g] = \int d^3x\left(\frac{\partial f}{\partial\tau}g - f\frac{\partial g}{\partial\tau}\right), \tag{3}$$

где $\hat{A}_f = i\int d^3x(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\tau}f - \hat{\varphi}\frac{\partial f}{\partial\tau})$.

**Упражнение 3:** Покажите, что если $\varphi$ и $f$ удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона, то можно эквивалентно написать, что (здесь уже предполагается формализм функционального интеграла)

$$A_f = i\int_\Sigma d\Sigma^\mu(\partial_\mu\varphi f - \varphi\partial_\mu f), \tag{4}$$

где $\Sigma$ какая-то гладкая поверхность в четырехмерном пространстве. Также покажите, что верна следующая формула

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle A_f(\tau)\varphi(\vec{x}_0,\tau_0)\rangle = 0, \quad \tau\neq\tau_0, \tag{5}$$

где здесь $A_f(\tau)$ вычислена для поверхности $\Sigma_\tau : (\vec{x}, x^4 = \tau)$.

**Упражнение 4:** Покажите, что

$$\langle 0|[\hat{A}_f, \hat{\varphi}(\vec{x}_0,\tau_0)]|0\rangle = i\int_{\Sigma_0} d\Sigma_\mu\langle J^\mu_f(x)\varphi(x_0)\rangle, \tag{6}$$

где $J^\mu_f = \partial^\mu\varphi f - \varphi\partial^\mu f$ и $\Sigma_0$ замкнутая 3-поверхность окружающая точку $x_0$. Далее покажите, что в свободной теории Клейна-Гордона $\partial_\mu\langle J^\mu_f(x)\varphi(x_0)\rangle = -\delta^{(4)}(x-x_0)f$, и откуда следует (3).

**Упражнение 5:** Используя разложение Челлена-Лемана покажите, что двух-точечная корреляционная функция во **взаимодействующей** теории приблизительно удовлетворяет свободному уравнению Клейна-Городна

$$(m^2 - \partial^2_\mu)\langle\varphi(x)\varphi(0)\rangle \approx 0, \tag{7}$$

когда $x\to\infty$. Чему равна погрешность данной оценки? Используя свойство кластерной факторизации корреляционной функции (свойство того, что корреляционная функция многих полей распадается на произведение корреляционных функций отдельных групп полей, если данные группы находятся далеко друг от друга), покажите, что корреляционная функция многих полей приблизительно удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона:

$$(m^2 - \partial_\mu^2)\langle\varphi(x)\varphi(x_1)...\varphi(x_n)\rangle \approx 0, \tag{8}$$

если $|x - x_i| \to \infty$, где $i = 1, ..., n$.

**Упражнение 6:** Убедитесь, что волновые пакеты вида

$$f_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{\omega_{\vec{q}}\tau - i\vec{q}\vec{x}} e^{-\frac{(\vec{q}-\vec{p})^2}{2\varepsilon}}, \quad \bar{f}_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{-\omega_{\vec{q}}\tau + i\vec{q}\vec{x}} e^{-\frac{(\vec{q}-\vec{p})^2}{2\varepsilon}}, \tag{9}$$

где $\omega_{\vec{q}} = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$, удовлетворяют свободному уравнению Клейна-Гордона. Покажите, что для маленьких $\varepsilon$ можно написать

$$f_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau) \approx e^{\omega_{\vec{p}}\tau - i\vec{p}\vec{x}}\psi_\varepsilon(\vec{x} + i\vec{v}\tau), \quad \bar{f}_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau) \approx e^{-\omega_{\vec{p}}\tau + i\vec{p}\vec{x}}\psi_\varepsilon(\vec{x} + i\vec{v}\tau), \tag{10}$$

где $\psi_\varepsilon(\vec{x}) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\vec{x}^2}$ и $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{\omega_{\vec{p}}}$ — групповая скорость. Покажите, что при $t \to -\infty$, волновые пакеты $f_{\vec{p}_1,\varepsilon}(\vec{x},\tau + it)$ и $f_{\vec{p}_2,\varepsilon}(\vec{x},\tau + it)$ становятся хорошо отдаленными друг от друга, если $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$.

**Упражнение 7:** Определим операторы

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\vec{p},\varepsilon} &= i\int d^3\vec{x}(f_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau)\partial_\tau\hat{\varphi}(\vec{x},\tau) - \partial_\tau f_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau)\hat{\varphi}(\vec{x},\tau)), \\ \hat{A}^\dagger_{\vec{p},\varepsilon} &= i\int d^3\vec{x}(\bar{f}_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau)\partial_\tau\hat{\varphi}(\vec{x},\tau) - \partial_\tau \bar{f}_{\vec{p},\varepsilon}(\vec{x},\tau)\hat{\varphi}(\vec{x},\tau)), \end{aligned} \tag{11}$$

и также определим $\hat{A}_f^{(in/out)}$, как

$$\hat{A}_f^{(in/out)} = \lim_{t\to\pm\infty} \hat{A}_f(\tau + it), \quad \hat{A}_f^{\dagger(in/out)} = \lim_{t\to\pm\infty} \hat{A}^\dagger_f(\tau + it). \tag{12}$$

Покажите, что в пределе $t \to -\infty$, корреляционная функция

$$\langle A_1(\tau_1 + it)...A_n(\tau_n + it)\rangle \tag{13}$$

не зависит от $\tau_i$, где $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n$. Далее покажите, что

$$[\hat{A}^{(in)}_{\vec{p},\varepsilon}, \hat{A}^{\dagger(in)}_{\vec{q},\varepsilon}] = \int d^3\vec{x}(\bar{f}_{\vec{q},\varepsilon}\partial_\tau f_{\vec{p},\varepsilon} - \partial_\tau \bar{f}_{\vec{q},\varepsilon} f_{\vec{p},\varepsilon}), \tag{14}$$

и в пределе $\varepsilon \to 0$ можно получить

$$[\hat{A}^{(in)}_{\vec{p}}, \hat{A}^{(in)}_{\vec{q}}] = 0, \quad [\hat{A}^{(in)}_{\vec{p}}, \hat{A}^{\dagger(in)}_{\vec{q}}] = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \tag{15}$$

**Упражнение 8:** Переходя к пространству Минковского, определим новые операторы $\tilde{A}_{\vec{p}}(t) = \hat{A}_{\vec{p}}(it)$, для которых имеем

$$\tilde{A}_p(t) = iZ^{-1/2}\int d^3\vec{x} f_p(\vec{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_t\hat{\varphi}(\vec{x},t), \quad \tilde{A}^\dagger_p(t) = -iZ^{-1/2}\int d^3\vec{x} f^*_p(\vec{x},t)\overleftrightarrow{\partial}_t\hat{\varphi}(\vec{x},t), \tag{16}$$

где $a\overleftrightarrow{\partial}_t b = a\partial_t b - b\partial_t a$ и $f_{\vec{p}}(\vec{x},t)$ — является уже обычной волной в пространстве Минковского (фактическим мы положили $\varepsilon = 0$ в $f_{\vec{p},\varepsilon}$), а $Z$ — нормировочный множитель (пусть $Z = 1$ для простоты). Покажите, что

$$A^{\dagger(in)}_{\vec{p}} = A^{\dagger(out)}_{\vec{p}} + i\int d^4x f^*_{\vec{p}}(x)(\partial^2_\mu + m^2)\hat{\varphi}(x), \tag{17}$$

где $A^{(in/out)}_{\vec{p}} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \tilde{A}_{\vec{p}}(t)$.

**Упражнение 9:** Определим

$$|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)} = A^{\dagger(in)}_{\vec{p}_1} ... A^{\dagger(in)}_{\vec{p}_N}|0\rangle, \quad {}_{(out)}\langle\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M| = \langle 0|A^{(out)}_{\vec{q}_1} ... A^{(out)}_{\vec{q}_M}. \tag{18}$$

Покажите, что

$$\begin{aligned}
{}_{(out)}\langle\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M|\hat{\varphi}(x)|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)} =& - i \lim_{t'\to\infty} f_{\vec{q}_1}(x')\overleftrightarrow{\partial}_{t'}\, {}_{(out)}\langle\vec{q}_2, ..., \vec{q}_M|T(\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x))|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)} \\
=& {}_{(out)}\langle\vec{q}_2, ..., \vec{q}_M|\hat{\varphi}(x)A^{(in)}_{\vec{q}_1}|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)} \\
&+ i\int d^4x' f_{\vec{q}_1}(x')(\Box_{x'} + m^2)\, {}_{(out)}\langle\vec{q}_2, ..., \vec{q}_M|T(\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x))|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)},
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$. Покажите, что

$${}_{(out)}\langle\vec{q}_2, ..., \vec{q}_M|A^{(in)}_{\vec{q}_1}|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)} = \sum_{i=1}^{N}(2\pi)^3 2\omega_{\vec{q}}\delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{q}_1)\, {}_{(out)}\langle\vec{q}_2, ..., \vec{q}_M|\vec{p}_1, ..., \hat{\vec{p}}_i, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)}, \tag{20}$$

где шляпка $\hat{}$ означает, что данный импульс вычеркнут из списка.

**Упражнение 10:** В результате манипуляций из Упражнения 9, можно прийти к формуле Лемана-Симанчика-Циммермана (ЛСЦ):

$$\begin{aligned}
S(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N|\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M) =& (\text{не связные члены}) \\
&+ (i)^{N+M}\int d^4x_1...d^4x_N d^4y_1...d^4y_M f^*_{\vec{p}_1}(x_1)...f^*_{\vec{p}_N}(x_N) f_{\vec{q}_1}(y_1)...f_{\vec{q}_M}(y_M) \\
&\times (\Box_{x_1} + m^2)...(\Box_{x_N} + m^2)(\Box_{y_1} + m^2)...(\Box_{y_M} + m^2) \\
&\times \langle 0|T(\varphi(x_1)...\varphi(x_N)\varphi(y_1)...\varphi(y_M))|0\rangle,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $S$-матрица определяется как

$$S(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N|\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M) \stackrel{\text{def}}{=} {}_{(out)}\langle\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M|\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N\rangle_{(in)}. \tag{22}$$

Покажите, что

$$S_c(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N|\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M) = (i)^{N+M} \lim_{\substack{k_i\to(-\omega_{\vec{p}_i}, -\vec{p}_i),\ i=1,...,N \\ k_{N+i}\to(\omega_{\vec{q}_i}, \vec{q}_i)\ i=1,...,M}} \prod_{i=1}^{N+M}(m^2 - k_i^\mu k_{i\mu})G_{N+M}(k_1, ..., k_{N+M}), \tag{23}$$

где $S_c(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N|\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M)$ — связная часть $S$-матрицы, а

$$G_{N+M}(k_1, ..., k_{N+M}) = \int d^4x_1...d^4x_{N+M}e^{ik_1x_1}...e^{ik_{N+M}x_{N+M}}\langle 0|T(\varphi(x_1)....\varphi(x_{N+M}))|0\rangle. \tag{24}$$

Далее переходя в Евклидово пространство, покажите, что

$$S_c(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N|\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M) = \lim_{\substack{k_i\to(-i\omega_{\vec{p}_i}, -\vec{p}_i),\ i=1,...,N \\ k_{N+i}\to(i\omega_{\vec{q}_i}, \vec{q}_i)\ i=1,...,M}} \prod_{i=1}^{N+M}(k_i^2 + m^2)W^{(N+M)}(k_1, ..., k_{N+M}). \tag{25}$$

Теперь используя то, что $W^{(N+M)}(k_1, ..., k_{N+M}) = W^{(N+M)}_{amp}(k_1, ..., k_{N+M})\prod_{i=1}^{N+M}W^{(2)}(k_i^2)$ и используя разложение Челлена-Лемана для $W^{(2)}(k_i^2)$ (с $Z = 1$), получите окончательную формулу ЛСЦ:

$$S_c(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_N|\vec{q}_1, ..., \vec{q}_M) = W^{(N+M)}_{amp}(k_1, ..., k_{N+M})\big|_{\substack{k_i=(-i\omega_{p_i}, -\vec{p}_i),\ i=1,...,N \\ k_{N+i}=(i\omega_{q_i}, \vec{q}_i)\ i=1,...,M}}. \tag{26}$$