Упражнения 2. Топологические свойства РГ потока

(Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **20.02.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Определение 1: Σ — есть беконечно-мерное пространство квазилокальных действий. Для теории скалярного поля φ_0 с симметрией $\varphi_0 \to -\varphi_0$, общий вид действия выглядит как

$$\mathcal{A}[\varphi_0] = \int d^d x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_{2k}}{(2k)!} \varphi_0^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_{2k}}{(2k)!} \varphi_0^{2k} (\partial \varphi_0)^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{2k+1}}{(2k)!} \varphi_0^{2k+1} (\partial \varphi_0)^2 \partial^2 \varphi_0 + ... \right], \tag{0.1}$$

таким образом бесконечное число коэффициентов $\{u_{2k}, v_{2k}, w_{2k+1}, ...\}$ может рассматриваться как координаты на пространстве Σ.

Определение 2: Операция ренормгруппового преобразования RG есть операция производимая в два шага:

1. Интегрирование по быстрым переменным $\tilde{\varphi}$, где $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) + \tilde{\varphi}(x)$:

$$\varphi_1(x) = \int_{|k|<\Lambda/L} \phi(k) e^{ikx}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \int_{\Lambda/L<|k|<\Lambda} \phi(k) e^{ikx}. \tag{0.2}$$

2. Перемасштабирование координат $x \to x/L$: $\varphi_1(x) = Z^{-1/2}(L) \varphi_0(x/L)$.

Для действия это можно записать в виде ряда преобразований

$$\mathcal{A}_\Lambda[\varphi_0(x)] \xrightarrow{1} \mathcal{A}_{1,\Lambda/L}[\varphi_1(x)] \xrightarrow{2} \mathcal{A}'_\Lambda[\varphi_0(x)], \tag{0.3}$$

где $\mathcal{A}'_\Lambda[\varphi_0(x)] = \mathcal{A}_{1,\Lambda/L}[Z^{-1/2}(L) \varphi_0(x/L)]$.

Главное предположение: Ренормгрупповое преобразование примененное к квазилокальному действию производит опять квазилокальное действие, то есть не выводит нас за пределы Σ:

$$RG : \Sigma \to \Sigma.$$

Или другими словами: если $\mathcal{A} \in \Sigma$, то $\mathcal{A}' = RG_l\{\mathcal{A}\} \in \Sigma$, где $l = \log L \geqslant 0$.

Свойство 1: Ренормгрупповое преобразование удовлетворяет свойству:

$$RG_{l+l'}\{\mathcal{A}\} = RG_l\{RG_{l'}\{\mathcal{A}\}\}, \quad RG_0\{\mathcal{A}\} = \mathcal{A}. \tag{0.4}$$

Свойство 2: Для инфинитезимального преобразования можно записать

$$RG_{\delta l}\{\mathcal{A}\} = \mathcal{A} + B\{\mathcal{A}\}\delta l + O(\delta l^2), \quad \text{где} \quad B\{\mathcal{A}\} = \frac{d}{dl} RG_l\{\mathcal{A}\}\bigg|_{l=0}. \tag{0.5}$$

Упражнение 1: Пусть $\mathcal{A}_l = RG_l\{\mathcal{A}_0\}$, где $\mathcal{A}_0$ какое-то начальное квазилокальное действие. Покажите, что верно

$$\frac{d}{dl}\mathcal{A}_l = B\{\mathcal{A}_l\}. \tag{0.6}$$

Упражнение 2: Покажите, что если в теории с действием $\mathcal{A}_0$ корреляционная функция двух полей при $|x| \to \infty$ равна

$$\langle \varphi_0(x) \varphi_0(0) \rangle \approx e^{-|x|/R_c}, \tag{0.7}$$

то в теории с $\mathcal{A}_l = RG_l\{\mathcal{A}_0\}$, она равна

$$\langle \varphi_0(x)\varphi_0(0)\rangle \approx e^{-|x|/(R_c e^{-l})}. \tag{0.8}$$

Определение 3: Σ_c есть подпространство в Σ с $R_c = \infty$, а $\Sigma(l) = RG_l\{\Sigma\}$. Также $\Sigma(\infty) = \lim\limits_{l\to+\infty} \Sigma(l)$.

Упражнение 3: Покажите, что если $\mathcal{A} \in \Sigma(\infty)$, то и $\mathcal{A}_{-l} \in \Sigma(\infty)$. Подумайте почему $\Sigma(\infty)$ разумно отождествить с пространством всех локальных квантовых теорий поля?

Определение 4: Фиксированной точкой называется такое действие $\mathcal{A}_*$, для которого верно

$$B\{\mathcal{A}_*\} = 0. \tag{0.9}$$

Упражнение 3: Покажите, что для фиксированной точки мы можем иметь либо $R_c = 0$, либо $R_c = \infty$.

Определение 5: Фиксированная точка с $R_c = \infty$ называется "критической" фиксированной точкой.

Упражнение 4: Предположим, что есть только две фиксированные точки в пространстве Σ, одна P_0 с $R_c = 0$, а другая P_∞ с $R_c = \infty$. Очевидно, что $P_\infty \in \Sigma_c$. Почему любая ренормгрупповая траектория, начинающаяся из какой-либо точки Σ с конечным R_c, будет приходить в P_0? Почему траектории которые начинаются из точек в Σ_c будут идти вдоль Σ_c ? Теперь пусть есть ренорм-групповая траектория U, которая соединяет точки P_∞ и P_0. Подумайте почему в данном случае $U = \Sigma(\infty)$?

Определение 6: $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ обозначает пространство всех локальных композитных полей: $\{\mathcal{O}_\alpha\} = \{\varphi_0^{2n}, \varphi_0^{2n}(\partial\varphi_0)^2, ...\}$. Фактически мы можем записать общий вид квазилокального действия, как $\mathcal{A} = \int d^dx \sum_\alpha \lambda_\alpha \mathcal{O}_\alpha$, где $\{\lambda_\alpha\} = \{u_{2n}, v_{2n}, w_{2n+1}, ...\}$. В общем $\mathcal{O}_\alpha(x) = \mathcal{O}_\alpha(\varphi_0(x), \partial_\mu\varphi_0(x), ...)$ и является полиномом по φ_0 и его производным.

Упражнение 5: Покажите, что

$$\int D\tilde{\varphi}\mathcal{O}_\alpha(\varphi_1(x) + \tilde{\varphi}(x), \text{производные от } \varphi_1 \text{ и } \tilde{\varphi})e^{-\mathcal{A}[\varphi_1+\tilde{\varphi}]} =$$
$$= \sum_\beta y_\alpha^\beta(L)\mathcal{O}_\beta(\varphi_1(x), \text{производные от } \varphi_1)e^{-\mathcal{A}_1[\varphi_1]}. \tag{0.10}$$

Подумайте как вывести общую формулу

$$\langle \mathcal{O}_\alpha(x)...\rangle|_{\mathcal{A}} = \langle \sum_\beta z_\alpha^\beta(L)\mathcal{O}_\beta(x/L)...\rangle|_{\mathcal{A}'}, \tag{0.11}$$

где $z_\alpha^\beta(L)$ связанны с $y_\alpha^\beta(L)$ формулой

$$z_\alpha^\beta(L)\mathcal{O}_\beta\big(\varphi_0(x/L), \frac{\partial}{\partial(x^a/L)}\varphi_0(x/L), ...\big) = y_\alpha^\beta(L)\mathcal{O}_\beta(Z^{-1/2}(L)\varphi_0(x/L), Z^{-1/2}(L)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_0(x/L), ...). \tag{0.12}$$

Упражнение 6: Пользуясь формулой (0.11), покажите, что в случае фиксированной точки $\mathcal{A}_*$, коэффициенты $z_\alpha^\beta(l)$ ($l = \log L$) удовлетворяют уравнению

$$z_\alpha^\beta(l + l') = \sum_\gamma z_\alpha^\gamma(l')z_\gamma^\beta(l), \tag{0.13}$$

и выведите дифференциальное уравнение по l для $z_\alpha^\beta(l)$.

Упражнение 7: Обозначим за Φ_α такую линейную комбинацию $\mathcal{O}_\alpha$, для которой $z_\alpha^\beta(l) = z_\alpha(l)\delta_\alpha^\beta$. Найдите $z_\alpha(l)$, используя уравнение (0.13), а также покажите, что $\langle\Phi_\alpha(x)\Phi_\beta(x')\rangle|_{\mathcal{A}_*} \sim |x-x'|^{D_\alpha+D_\beta}$.