Упражнения 3. Гауссова фиксированная точка

(Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **1.03.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Определение 1: Ифинитезимальное действие ренормгруппового преобразования может быть записанно как

$$RG_{\delta,\mathcal{A}_*} = 1 - \delta l D. \tag{0.1}$$

Поля Φ_α есть такие специальные комбинации композитных локальных полей, для которых верно

$$D\Phi_\alpha = D_\alpha \Phi_\alpha, \tag{0.2}$$

где D_α некоторые числа, которые называются масштабными размерностями.

Упражнение 1: Действие оператора B на теорию близкую к критической можно записать, как

$$B\{\mathcal{A}_* + \delta\mathcal{A}\} = K\delta\mathcal{A}, \tag{0.3}$$

где K некоторый оператор. Покажите, что любой собственный вектор Ψ_α оператора K: $K\Psi_\alpha = \kappa_\alpha \Psi_\alpha$, может быть записан, как $\Psi_\alpha = \int d^d x \Phi_\alpha(x)$ и $\kappa_\alpha = d - D_\alpha$.

Упражнение 2: Рассмотрите Гауссово действие

$$\mathcal{A}_{*,G} = \int d^d x \frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2. \tag{0.4}$$

Проделайте для него операцию ренормгруппового преобразования RG и покажите, что

$$\mathcal{A}' = \int d^d x \frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2, \tag{0.5}$$

какое нужно выбрать для этого $Z(L)$?

Упражнение 3: Рассмотрим композитные поля вида $\mathcal{O}_n = \frac{1}{n!}\varphi_0^n$. На первом шаге ренормгрупповой операции для Гауссового действия мы получим

$$\frac{1}{2}\varphi_1^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\langle\tilde{\varphi}^k\rangle_{\tilde{\varphi}} \frac{1}{(n-k)!}\varphi_1^{n-k}. \tag{0.6}$$

В случае инфинитезимального преобразования $L = 1 + \delta l$, покажите, что

$$\frac{1}{k!}\langle\tilde{\varphi}^k\rangle_{\tilde{\varphi}} = \delta l N_k, \tag{0.7}$$

и вычислите N_k. Далее покажите, что после второго шага ренормгрупповой процедуры мы получим

$$D\mathcal{O}_n = n\frac{d-2}{2}\mathcal{O}_n - \sum_{k=1}^{n} N_k \mathcal{O}_{n-k}. \tag{0.8}$$

Упражнение 4: Найдите такую линейную комбинацию полей $\mathcal{O}_n$:

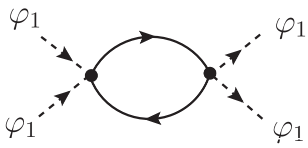
$$\Phi_n = \mathcal{O}_n + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{O}_{n-k}, \tag{0.9}$$

для которой $D\Phi_n = D_n\Phi_n$. Найдите также D_n. Покажите, что на самом деле

$$\Phi_n = \frac{1}{n} : \varphi_0^2 := \frac{1}{n!}\varphi_0^2 - \frac{1}{2!(n-2)!}\langle\varphi_0^2\rangle\varphi_0^{n-2} - .... \tag{0.10}$$

Вычислите $\langle\Phi_n(x)\Phi_{n'}(0)\rangle$.

Упражнение 5: На первом шаге ренормгрупповой процедуры в теории φ^4 возникает диаграмма вида:



где сплошными линиями обозначены пропагаторы быстрых полей (мы пренебрегаем массой m^2): $\langle\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(p)\rangle = (2\pi)^d\delta^{(d)}(k+p)\frac{\Theta(p)}{p^2}$ и $\Theta(p) = \theta(p-\frac{\Lambda}{L})\theta(\Lambda-p)$ ($\theta(x)$ — функция Хевисайда), а пунктирными линиями поля φ_1. Главный вклад от такой диаграммы, получавшийся $\sim \int d^4x\varphi_1^4(x)$, нужно было вычислить в Листке 1. Он получался в пределе, когда внешнии импульсы полей φ_1 малы по сравнению с Λ/L. В данном упражнении попробуйте вычислить следующие два члена в разложении Тейлора по величине внешних импульсов: $\sim k/\Lambda$ и $\sim (k/\Lambda)^2$. Член линейный по k является полной производной, и так как мы предполагаем затухание поля на бесконечности, то он выпадает из эффективного действия $\mathcal{A}_1$.