Упражнения 5. Фиксированные точки и Критические точки

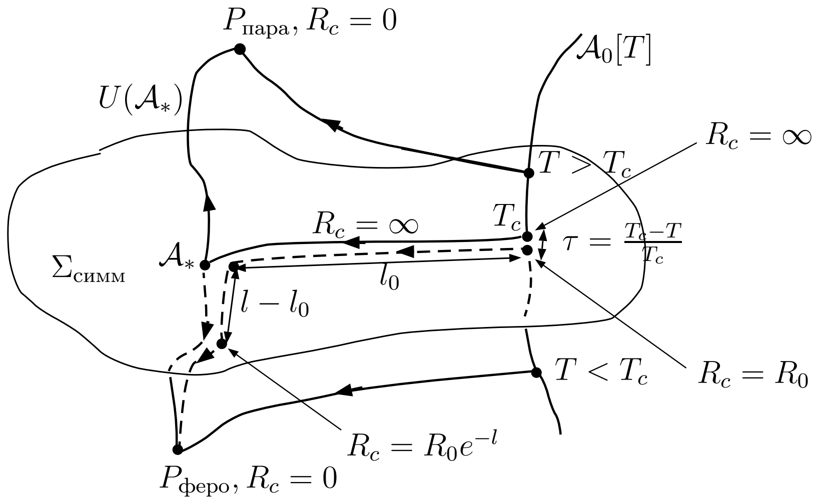
(Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **27.03.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Упражнение 1: Предположим, что мы рассматриваем теорию с действием

$$\mathcal{A}_0[T] = \int d^dx \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi_0)^2 + \frac{m_0^2(T)}{2}\varphi_0^2 + \frac{\lambda_0(T)}{4!}\varphi_0^4\right), \tag{0.1}$$

где коэффициенты есть некоторые функции от температуры T. Поэтому $\mathcal{A}_0[T]$ является одномерной кривой в пространстве теорий. Данная кривая называется **физической кривой**.

Рассматривая только пространство теорий $\Sigma_{\text{симм}} \in \Sigma$ с симметрией $\varphi_0 \to -\varphi_0$, мы **предполагаем**, что в нем есть фиксированная точка $\mathcal{A}_* \in \Sigma_{\text{симм}}$, такая, что она имеет только **одно** релевантное (или маргинально релевантное поле) Φ_0 с размерностью $D_0 < d$, а все остальные поля Φ_α иррелевантные: $D_\alpha > d$ (Поля Φ_α являются собственными функциями оператора D: $D\Phi_\alpha = D_\alpha\Phi_\alpha$, где оператор D определяется, как $RG_{\delta l,\mathcal{A}_*} = 1 - \delta l D$). Из данного пердположения следует, что нестабильное многообразие $U(\mathcal{A}_*)$ является одномерным, а критическая поверхность $\Sigma_{\text{крит}}$ имеет коразмерность один. Поэтому **физическая кривая** пересекает критическую поверхность в некоторой точке $T = T_c$:



Траектория начинающаяся в точке T_c **физической кривой** приходит в фиксированную точку $\mathcal{A}_*$ когда $l \to \infty$. Другие траектории заканчиваются в некритических фиксированных точках $P_{\text{пара}}$ и $P_{\text{феро}}$.

Теперь мы рассмотрим траекторию C_τ, которая начинается в некоторой точке T близкой к T_c, то есть $\tau = \frac{T_c - T}{T_c} \ll 1$. После РГ "времени" l_0, данная траектория будет находится в некоторой точке $\mathcal{A}$, которая находится вблизи $\mathcal{A}_*$, поэтому мы можем записать действие в данной точке, как:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_* + y_0 \int d^dx \Phi_0(x) + \sum_{\alpha \neq 0} y_\alpha \int d^dx \Phi_\alpha(x). \tag{0.2}$$

Фактически y_0 и y_α, $\alpha \neq 0$ являются каноническими координатами и для них мы можем записать следующие РГ уравнения:

$$\frac{d}{dl} y_0 = \kappa_0 y_0, \quad \frac{d}{dl} y_\alpha = \kappa_\alpha y_\alpha, \tag{0.3}$$

где $\kappa_0 = d - D_0 > 0$ и $\kappa_\alpha = d - D_\alpha < 0$, $\alpha \neq 0$. Покажите, что $R_0 \sim \tau^{-\nu}$. Чему равно ν? Рассмотрите намагниченность $\bar{M}(x) \sim \langle \varphi_0(x) \rangle$. Полагая, что $\bar{M}$ не зависит от координаты x, напишите и решите уравнение Калана-Симанчика для $\bar{M}$. Покажите, что $\bar{M} \sim \tau^\beta$. Чему равно β?

Теперь рассмотрим траекторию, которая начинается в критической точке $T = T_c$ и приходит в фиксированную точку $\mathcal{A}_*$. Добавим к действию $\mathcal{A}_*$ внешнее магнитное поле, а именно

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_* + H \int d^d x \varphi_0(x). \tag{0.4}$$

Какую размерность имеет H? Покажите, что $\bar{M} \sim H^{\frac{1}{\delta}}$, где $\delta = \frac{d - D_\varphi}{D_\varphi}$, где D_φ — размерность поля φ. Аналогичным образом покажите, что теплоемкость (при $H = 0$), равна: $C \sim \tau^\alpha$ и $\alpha = 2 - d\nu$.