Упражнения 7. $O(N)$-модель и нелинейная σ-модель

(Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **10.04.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Упражнение 1: Рассмотрим $O(N)$-модель в d мерном Евклидовом пространстве

$$\mathcal{A} = \int d^d x \Big(\frac{1}{2}(\partial \vec{\varphi})^2 + \frac{M^2}{2}\vec{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{4!}(\vec{\varphi})^2 \Big), \tag{0.1}$$

где $\vec{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_N)$ — N-компонентное поле. Проверьте, что данное действие обладает $O(N)$ симметрией $\varphi_i \to O_{ij}\varphi_j$, где $OO^T = 1$. Вычислите $\beta(\lambda)$ и $\gamma_{\varphi^2}(\lambda)$-функции в размерности $d = 4 - \epsilon$ и получите

$$\beta(\lambda) = -\epsilon\lambda + \frac{N+8}{48\pi^2}\lambda^2 + O(\lambda^3), \quad \gamma_{\varphi^2}(\lambda) = \frac{N+2}{48\pi^2}\lambda + O(\lambda^2). \tag{0.2}$$

Чему равно λ_* в точке Вилсона-Фишера?

Упражнение 2: Покажите, что если $M^2 < 0$ в формуле (0.1), то потенциал $V(\vec{\varphi}) = \frac{M^2}{2}\vec{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{4!}(\vec{\varphi})^2$ имеет минимум в $|\vec{\varphi}_c| \neq 0$, найдите $|\vec{\varphi}_c|$.

Упражнение 3: Рассмотрим действие для нелинейной σ-модели:

$$\mathcal{A} = \int d^d x \frac{1}{2g}(\partial \vec{n})^2, \tag{0.3}$$

где $\vec{n} = (n_1, ..., n_N)$ и $\vec{n}^2 = 1$. Рассмотрите флуктации вокруг вектора $\vec{n}_0 = (0, ..., 0, 1)$, а именно $\vec{n} = (\pi^1(x), \pi^2(x), ..., \pi^{N-1}(x), \sigma(x))$, где $\sigma(x) = \sqrt{1 - (\pi^k)^2}$. Покажите, что действие (0.3) теперь можно записать как

$$\mathcal{A} = \int d^d x \Big(\frac{1}{2}(\partial_a \phi^k)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \mathcal{O}_n(x) \Big), \tag{0.4}$$

где $\pi^k = \sqrt{g}\phi^k$. Найдите чему равны операторы $\mathcal{O}_n$. Покажите, что их размерности $D_n = 2 + (n+1)(d-2)$. Покажите, что если $d > 2$, то все операторы $\mathcal{O}_n$ иррелевантные. Отсюда следует, что длинно-масштабная динамика данной теории сводится к Гауссовой фиксированной точке (в данном случае она называется Голдстоуновской фиксированной точкой) $\mathcal{A}_{*,N-1} = \int d^d x \frac{1}{2}(\partial_a \phi^k)^2$.

Упражнение 4: В данном упражнении мы будем вычислять β-функцию для нелинейной σ-модели в двумерном пространстве ($d = 2$). Мы будем это делать напрямую из определения РГ потока. Итак мы определяем действие в “ультрафиолете” как

$$\mathcal{A}_\Lambda = \int d^2 x \frac{1}{2g}(\partial \vec{n})^2, \quad \vec{n}^2 = 1, \tag{0.5}$$

с обрезанием Λ, также мы полагаем, что в “ультрафиолете” $g \ll 1$. Итак, нам нужно определить быстрые и медленные поля. Мы это делаем оригинальным методом Полякова:

$$\vec{n}(x) = \vec{n}_0(x)\sqrt{1 - (\phi^i)^2} + \vec{e}_i(x)\phi^i(x), \quad i = 1, ..., N-1, \tag{0.6}$$

где $\phi^k(x) = \int_{\Lambda/L < |k| < \Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2}\phi^i(k)e^{ikx}$ являются быстрыми полями, а $\vec{e}_k(x)$ произвольная ортонормированная система из $N-1$ векторов ортогональная к $\vec{n}_0$:

$$\vec{n}_0(x)\vec{e}_k(x) = 0, \quad \vec{e}_i(x)\vec{e}_j(x) = \delta_{ij}, \quad \vec{n}_0^2 = 1. \tag{0.7}$$

Мы рассматриваем $\vec{e}_k$ и $\vec{n}_0$ как медленные поля. Удобно записать:

$$\partial_a \vec{n}_0(x) = B_a^i(x)\vec{e}_i(x), \quad \partial_a \vec{e}_i(x) = A_a^{ij}(x)\vec{e}_j(x) - B_a^i(x)\vec{n}_0(x). \tag{0.8}$$

Найдите B_a^i и A_a^{ij}. Покажите, что $\sum_i B_a^i B_a^i = (\partial_a \vec{n}_0)^2$. Покажите, что теперь действие (0.5) можно переписать как

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0[\vec{n}_0] + \delta\mathcal{A}[\vec{n}_0, \phi^i], \tag{0.9}$$

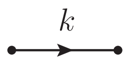
где

$$\mathcal{A}_0[\vec{n}_0] = \int d^2x \frac{1}{2g}(\partial \vec{n}_0)^2, \quad \delta\mathcal{A}[\vec{n}_0, \phi^i] = \int d^2x \frac{1}{2g}\big((\partial_a\phi^i - A_a^{ij}\phi^j)^2 + B_a^i B_a^j(\phi^i\phi^j - \delta^{ij}\phi^2)\big). \tag{0.10}$$

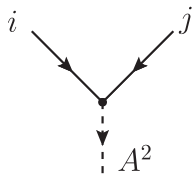
Теперь наша задача отынтегрировать быстрые переменные ϕ^i:

$$\text{конст} \cdot e^{-\mathcal{A}_1[\vec{n}_0]} = e^{-\mathcal{A}_0[\vec{n}_0]} \int D\phi^i e^{-\delta\mathcal{A}[\vec{n}_0, \phi^i]}. \tag{0.11}$$

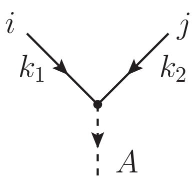
Диаграммная техника для такого функционального интеграла следующая:



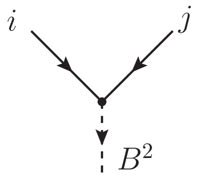
$= \quad \delta^{ij} g/k^2, \quad \Lambda/L < |k| < \Lambda$



$= \quad -A_a^{ij} A_a^{ij}/g$



$= \quad i(A_a^{ij}/g)(k_1^a - k_2^a)$

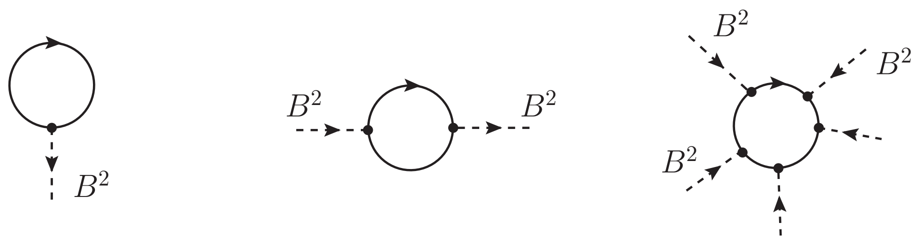


$= \quad (\delta^{ij} B_a^l B_a^l - B_a^i B_a^j)/g$

Вклад в $\mathcal{A}_1$ дается от всех связных диаграмм:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 - \{\text{сумма всех связных диаграмм}\}. \tag{0.12}$$

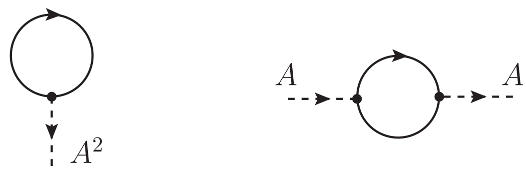
В лидирующем порядке по g вклад дается однопетлевыми диаграммами. Вычислите диаграмму (a):



(a) (b) (c)

Покажите, что диаграмма (b) генерирует член B^4, с коэффициентом $1/\Lambda^2$. Покажите, что этот член является иррелевантным и поэтому мы игнорируем его. Покажите, что диаграммы вида (c) могут быть проигнорированны по тем же причинам.

Далее покажите прямым вычислением, что диаграммы:



обладают логарифмическим поведением, но в сумме точно сокращают друг друга. В итоге вы должны получить

$$\mathcal{A}_1 = \int d^2x \big(\frac{1}{2g} - \frac{N-2}{4\pi}\log L\big)(\partial_a \vec{n}_0)^2. \tag{0.13}$$

Чему равна $\beta(g)$-функция? Решите уравнение $\frac{dg}{dl} = -\beta(g)$, где $l = \log L$.