Упражнения 8. Ренормгруппа и тензор энергии-импульса

(Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **24.04.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Упражнение 1: Покажите, что вариация композитного поля $\mathcal{O}_\alpha(x)$ есть

$$\delta_\varepsilon \mathcal{O}_\alpha(x) = \varepsilon^\mu(x)\partial_\mu \mathcal{O}_\alpha(x) + \frac{D_\alpha^\beta}{d}(\partial_\mu \varepsilon^\mu)\mathcal{O}_\beta(x) + \text{члены с } \partial_\nu\partial_\lambda\varepsilon^\mu \text{ и.т.д.} \tag{0.1}$$

Упражнение 2: Решите специальные конформные тождества Уорда для $n = 1, 2, 3$. Вы должны получить для $n = 1, 2$:

$$\begin{aligned} &1. \quad \langle \Phi_\alpha(x) \rangle = 0, \\ &2. \quad \langle \Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2) \rangle = \frac{G_{\alpha\beta}}{|x_1 - x_2|^{2D_\alpha}}, \quad G_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{если} \quad D_\alpha \neq D_\beta. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Найдите вид трех-точечной функции $\langle \Phi_\alpha(x_1)\Phi_\beta(x_2)\Phi_\gamma(x_3) \rangle$.

Упражнение 3: Покажите, что в случае $d = 2$, уравнение

$$\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu - \delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda v^\lambda) = 0 \tag{0.3}$$

имеет бесконечно много решений.

Упражнение 4: Покажите, что специальное конформное преобразование $x^\mu \to x^\mu + \epsilon v^\mu(x)$, где $v^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu(bx)$ является решением уравнения

$$\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu - \frac{2}{d}\delta_{\mu\nu}(\partial_\lambda v^\lambda) = 0. \tag{0.4}$$

Также покажите, что не существует решения данного уравнения выше второго порядка по x:

$$v_\mu = \alpha_\mu + \beta_{\mu\alpha}x^\alpha + \gamma_{\mu\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \delta_{\mu\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma + \text{и.т.д,} \tag{0.5}$$

при $d \geqslant 3$ (d размерность пространства).

Упражнение 5*: (Данное упражнение является продолжением Упражнения 2 для высших корреляционных функций, делать его не обязательно!) Итак, рассмотрим специальные поля $\Phi_i(x_i)$, для которых закон преобразования (0.1) записывается как

$$\delta_\varepsilon \Phi_i(x_i) = \varepsilon^\mu(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i^\mu}\Phi_i(x_i) + \frac{D_i}{d}\left(\frac{\partial \varepsilon^\mu(x_i)}{\partial x_i^\mu}\right)\Phi_i(x_i) + \text{члены с } \partial_\nu\partial_\lambda\varepsilon^\mu \text{ и.т.д.} \tag{0.6}$$

Как мы уже знаем трансляционная инвариантность ($x_i^\mu \to x_i^\mu + \epsilon^\mu$) приводит к тому, что корряляционная функция $\langle \Phi_1(x_1)...\Phi_n(x_n) \rangle$ зависит только от разностей $x_{ij} = x_i - x_j,\ i, j = 1, .., n,\ i < j$. Далее у нас в запасе есть тождества Уорда для диллатаций и специальных конформных преобразований. Покажите, что их можно записать как[1]

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + D_i \right) \langle \Phi_1(x_1)...\Phi_n(x_n) \rangle = 0, \\ &\sum_{i=1}^{n} \left(2x_i^\nu x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} - x_i^2 \frac{\partial}{\partial x_{i\,\nu}} + 2D_i x_i^\nu \right) \langle \Phi_1(x_1)...\Phi_n(x_n) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{0.7}$$

[1]Мы используем здесь верхние и нижние индексы, но будем предполагать, что мы работаем в пространстве Евклида, то есть с метрикой $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, тогда позиция индесов не важна.

Можно искать общее решение данных уравнений в виде анзатца

$$\langle \Phi_1(x_1)....\Phi_n(x_n)\rangle = H(x_1,...,x_n)F(u_1,...,u_{n(n-3)/2}), \tag{0.8}$$

где $H(x_1,...,x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^{-2\gamma_{ij}}$, а F — произвольная функция конформных инвариантнов $u_k, k = 1,..,n(n-3)/2$. Найдите коэффициенты γ_{ij}, исходя из требования, чтобы после подстановки данного анзатца в уравнения (0.7), получались следующие уравнения для $F(u_1,...,u_{n(n-3)/2})$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}F(u_1,...,u_{n(n-3)/2}) = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n}\big(2x_i^{\nu}x_i^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}} - x_i^2\frac{\partial}{\partial x_{i\,\nu}}\big)F(u_1,...,u_{n(n-3)/2}) = 0.. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Далее очевидно, что если данные уравнения верны для всех $u_k, k = 1,..,n(n-3)/2$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}u_k = 0,\\ &\sum_{i=1}^{n}\big(2x_i^{\nu}x_i^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}} - x_i^2\frac{\partial}{\partial x_{i\,\nu}}\big)u_k = 0, \end{aligned} \tag{0.10}$$

то они и верны для произвольной функции $F(u_1,...,u_{n(n-3)/2})$. Теперь, используя анзатц для u_k:

$$u_k = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^{2\beta_{ij}^k}, \tag{0.11}$$

найдите уравнения для β_{ij}^k исходя из (0.10) и покажите, что действительно существует $\frac{n(n-3)}{2}$ независимых решений. Найдите общий вид корреляционной функции $\langle\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3)\Phi_4(x_4)\rangle$.