# Упражнения 9

( Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **08.05.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu )

**Упражнение 1:** Рассмотрим двух-точечную корреляционную функцию в пространстве Евклида:

$$G(x) = \langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0)\rangle, \tag{0.1}$$

где $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$. Мы предполагаем, что данная теория инвариатна относительно поворотов пространства, следовательно инвариантна и наша двух-точечная функция. Теперь обозначим $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\tau = x^4$, полагая, что $\tau$ — Евклидово время, запишем двух-точечную функцию как

$$G(\vec{x}, \tau) = \langle \mathcal{O}(\vec{x}, \tau)\mathcal{O}(\vec{0}, 0)\rangle. \tag{0.2}$$

Далее, если $\tau > 0$ мы можем записать

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\vec{x}, \tau)\mathcal{O}(\vec{0}, 0)\rangle &= \langle 0|\hat{\mathcal{O}}(\vec{x}, \tau)\hat{\mathcal{O}}(\vec{0}, 0)|0\rangle = \langle 0|\hat{\mathcal{O}}(\vec{x}, 0)e^{-\hat{H}\tau}\hat{\mathcal{O}}(\vec{0}, 0)|0\rangle = \\ &= \sum_n \langle 0|\hat{\mathcal{O}}(\vec{x}, 0)|n\rangle\langle n|\hat{\mathcal{O}}(\vec{0}, 0)|0\rangle e^{-E_n\tau} \end{aligned} \tag{0.3}$$

и предполагая положительность спектра: $\hat{H}|0\rangle = 0$ и $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, с $E_n > 0$, мы можем определить аналитическую фукнцию $G_+(\vec{x}, \tau)$ в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\tau > 0$:

$$G_+(\vec{x}, \tau) = \sum_n \langle 0|\hat{\mathcal{O}}(\vec{x}, 0)|n\rangle\langle n|\hat{\mathcal{O}}(\vec{0}, 0)|0\rangle e^{-E_n\tau}. \tag{0.4}$$

Эта функция является аналитическим продолжением функции $G(\vec{x}, \tau)$ на полуплоскость $\mathrm{Re}\,\tau > 0$.

Определите аналогично функцию $G_-(\vec{x}, \tau)$, которая является аналитическим продолжением функции $G(\vec{x}, \tau)$ на полуплоскость $\mathrm{Re}\,\tau < 0$. Докажите равенство:

$$G_+(\vec{x}, it + 0) = G_-(\vec{x}, it - 0), \quad \text{если:} \quad -|\vec{x}| < t < |\vec{x}|. \tag{0.5}$$

Покажите, что

$$\langle 0|[\hat{\mathcal{O}}(\vec{x}, t), \hat{\mathcal{O}}(\vec{0}, 0)]|0\rangle = 0, \tag{0.6}$$

при $t^2 < |\vec{x}|^2$.

**Упражнение 2:** Покажите, что для спектральной плотности $\rho(\mu^2)$ из представления Челлена-Лемана

$$\rho(q^2) = \int d\alpha |\langle 0|\hat{\varphi}(0)|\alpha\rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q^\mu - p^\mu(\alpha)), \quad q^2 = (q^0)^2 - \vec{q}^2, \tag{0.7}$$

верно

$$\int \frac{d\mu^2}{2\pi}\rho(\mu^2) = 1. \tag{0.8}$$

Для этого используйте, что канонический коммутатор полей равен

$$[\frac{\partial\hat{\varphi}(\vec{x}, \tau)}{\partial\tau}, \hat{\varphi}(\vec{y}, \tau)] = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{0.9}$$

Напомним, что представление Челлена-Лемана записывается как

$$\langle\varphi(\vec{x},\tau)\varphi(0,0)\rangle = \langle 0|T_e\big(\hat{\varphi}(\vec{x},\tau)\hat{\varphi}(0,0)\big)|0\rangle = \int_0^\infty \frac{d\mu^2}{2\pi}\rho(\mu^2)D(|x|,\mu^2), \tag{0.10}$$

где $|x| = \sqrt{\vec{x}^2+\tau^2}$ и $D(|x|,\mu^2)$ обычный скалярный пропагатор для частицы с массой $\mu$:

$$D(|x|,\mu^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{i\vec{k}\vec{x}+ik_4\tau}}{k_4^2+\vec{k}^2+\mu^2}. \tag{0.11}$$

**Упражнение 3:** Покажите, что матричный элемент

$$\langle 0|\hat{\varphi}(0)|\vec{p}\rangle, \tag{0.12}$$

где $\langle\vec{p}|\vec{p}'\rangle = 2\omega_{\vec{p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$ не зависит от импульса $\vec{p}$ и равен константе (которая есть $Z^{1/2}$). Используйте Лоренц-инвариатность вакуума и оператора $\hat{\varphi}(0)$, а именно для унитарного оператора $U_\Lambda$, который осуществляет некоторое Лоренц-преобразование $\Lambda$, верно $U_\Lambda|0\rangle = |0\rangle$ и $U_\Lambda\hat{\varphi}(0)U_\Lambda^{-1} = \hat{\varphi}(0)$ и $U_\Lambda|\vec{p}\rangle = |U_\Lambda\vec{p}\rangle$.