Комплексный анализ. Семинар 1. 11 февраля 2014 г.

Домашнее задание (добавленные задачи отмечены звездочкой)

0*. (*задача на лекции*) Найдите ошибку в рассуждении: $1^2 = (-1)^2 \Rightarrow \ln 1^2 = \ln(-1)^2 \Rightarrow 2\ln 1 = 2\ln(-1) \Rightarrow \ln 1 = \ln(-1) \Rightarrow 1 = -1$. Покажите, что не существует функции $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ такой, что $e^{f(z)} = z$ и $f(z_1 z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ для всех $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Пусть комплексная плоскость вложена в пространство с началом координат O. Какие тройки ее точек z_1, z_2, z_3 являются проекциями трех вершин некоторого куба, соседних с вершиной O? Покажите, что те и только те, для которых $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, но $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \neq 0$.

2. Опишите все функции $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, у которых $|f|$ зависит только от $\operatorname{Re} z$, а $\arg f$ — только от $\operatorname{Im} z$ (пример: e^z).

2*. Всякая голоморфная в круге вещественнозначная функция постоянна.

3. Найдите конформное отображение области $\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, 0 < y < \sqrt{x^2 + 1}\}$ на открытый единичный круг.

3*. То же для области $\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, 0 < y < \sqrt{ax^2 + b}\}$ при любых $a, b > 0$.

4. То же для области $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1, |z - 1 + 2i| > 2\}$.

4*. То же для области $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0, |z| > 1, z \notin (1, 2]\}$.

5. Найдите образ следующих областей и линий сетки, состоящей из горизонтальных и вертикальных прямых/отрезков: (A) $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при $w = 1/z$; (B) $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ при $w = z^2$; (C) $\{-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ при $w = \operatorname{tg} z$. (Указание. $\operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$.)

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX