Комплексный анализ. Семинар 2. 18 февраля 2014 г.

1. Вытекает ли из равномерной сходимости γ_n к γ на I, что $\int_{\gamma_n} f\,dz$ сходится к $\int_\gamma f\,dz$? Покажите, что ответ положительный, если $f \in \mathcal{O}(\gamma(I))$, и отрицательный, если $f(z) = \overline{z}$.

2. Интеграл по окружности $\{|z| = 1\}$ от непрерывной $\mathbb{R}$-значной ($\mathbb{C}$-значной) функции, модуль которой не превосходит 1, сам по модулю не превосходит 4 (соответственно 2π), причем эта оценка неулучшаема.

3. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — круг, полуплоскость или вся плоскость, $a_1, \dots, a_n \in G$, $D := G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Покажите, что функция $f \in \mathcal{O}(D)$ имеет первообразную в D тогда и только тогда, когда вычеты f во всех точках $a_1, \dots, a_n$ равны нулю. В частности, $1/z$ не имеет первообразной на $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

4. (A) Если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, то $\frac{f(z)}{z^2+1}$ имеет первообразную на $\{|z| > 1\}$ тогда и только тогда, когда $f(i) = f(-i)$. (B) Выберем $f(z) \equiv 1$ и положим

$$g_j(z) := \frac{\pi}{2} - \int_z^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2+1}, \qquad z \in D_j := \mathbb{C} \setminus \gamma_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где $\gamma_1 := [i, -i]$, дуги единичной окружности γ_2 и γ_3 соединяют i с $-i$ через -1 и 1 соответственно, а γ_4 идет вдоль γ_2 от i до -1, по отрезку от -1 до 1 и вдоль γ_3 от 1 до i. Покажите, что каждая функция $g_j(z)$ является первообразной функции $\frac{1}{z^2+1}$ на D_j (значит, и на $\{|z| > 1\}$) и конформно отображает D_j на свой образ. Найдите области $g_j(D_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

5. Найдите (A) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$, (B) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{5-4\sin\theta}\,d\theta$, $n \in \mathbb{Z}$.

6 (подготовка к задаче **7**(C) и дальнейшим). (A) Покажите, что если $f(z)$ непрерывна на $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\}$ и стремится к 0 при $|z| \to \infty$, то для всех $t > 0$ имеем $\int_{\gamma_R} f(z)e^{itz}\,dz = o(1)$ при $R \to \infty$, где $\gamma_R(\theta) := Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Извлеките из **7**(A) контрпример к этому утверждению для $t < 0$. (B) Пусть $f(z)$ непрерывна при $0 < |z - a| < \varepsilon$ и существует $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) =: A$. Ориентируем дугу окружности $\gamma_\varepsilon(\theta) := \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, по возрастанию θ. Тогда $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i A + o(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

7. При всех $t \in \mathbb{R}$ найдите (A) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos tx}{x^4+1}\,dx$; (B) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{-x^2+2ix+10}\,dx$; (C) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx$; (D) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^4+a^2x^2}\,dx$, $a > 0$.

8. Найдите (A) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1}$, $n = 2, 3, \dots$ (указание: интегрируйте по границе сектора $\{0 < \arg z < 2\pi/n, |z| < R\}$); (B) $\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{x^n+1}$, $n = 2, 3, \dots$, $-1 < a < n-1$; (C) $\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{x^2+4x+8}$, $-1 < a < 1$.

9. Найдите (A) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{e^x+1}$, $0 < a < 1$ (после чего заменой $e^x = y^n$ проверьте результаты **8**(A),(B)); (B) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos tx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,dx$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$; (C) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin tx}{\operatorname{sh} x}\,dx$, $t \in \mathbb{R}$.