Комплексный анализ. Задачи к лекции 3. 25 февраля 2014 г.

1. *Вокруг теоремы Абеля.* (A) Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0$. Покажите, что он сходится равномерно на отрезке $[0, z_0]$ и, в частности, его сумма непрерывна на этом отрезке. (B) Для $|w| < 1$ определим $\operatorname{arctg} w$ как конформное отображение круга на полосу, обратное к $w = \operatorname{tg} z$ (см. листок 1, задача **5**(C)). Покажите, что $\operatorname{arctg}(iw) = i(w + w^3/3 + w^5/5 + \dots)$ при $|w| < 1$ и выведите отсюда с помощью одного взгляда на картинку, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}(-1)^m \quad \text{при} \quad \pi m < x < \pi(m+1), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

(C) Найдите $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ (тут уже потребуются вычисления). (D) Покажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n = -\ln(1-z)$ при $|z| < 1$, где $\ln\zeta := \ln|\zeta| + i\arg\zeta$, $-\pi < \arg\zeta < \pi$. Найдите суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ при $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (с помощью первого из них Абель опроверг в 1826 г. утверждение Коши о том, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна). Выведите (B) и (C) заново. (E) Сколько раз дифференцируема функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad \text{на интервале} \quad 0 < x < 2\pi\ ?$$

(Указание. Проверьте, что $n^{-1/2} = C\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-nt}\,dt$ для некоторой константы $C > 0$. Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} z^n = Cz\int_0^\infty t^{-1/2}(e^t - z)^{-1}\,dt$ при $|z| < 1$. Пользуясь теоремами Мореры (для $\int_0^R$) и Вейерштрасса ($R \to \infty$), покажите, что правая часть последнего равенства голоморфна при $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.)

2. *Особые точки на границе круга сходимости.* Пусть $U = \{|z| < R\}$ есть круг сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Точка $z_0 \in \partial U$ называется *неособой* для f, если найдутся открытый круг V с центром z_0 и функция $g \in \mathcal{O}(V)$ такие, что $g = f$ на $V \cap U$. (A) Покажите, что множество особых точек f на ∂U всегда замкнуто и непусто. (B) Приведите 4 примера, показывающие, что сходимость/расходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ и особость/неособость точки z_0 для f могут сочетаться в любых комбинациях. (C) Если $a_n \geqslant 0$ для всех n, то точка $z_0 = R$ является особой для f. (D) Условие $a_n \geqslant 0$ можно заменить на $|\arg a_n| \leqslant C < \pi/2$, но нельзя на $\operatorname{Re} a_n > 0$. (E) Покажите, что для $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ все точки единичной окружности — особые. (Указание. Проверьте, что $f(re^{i\theta}) \to \infty$ при $r \to 1$ всякий раз, когда θ является рациональным кратным π.) (F) Постройте степенной ряд с радиусом сходимости 1, для которого все точки $e^{i\theta}$ с $\theta \in [0, \pi]$ — особые, а все точки $e^{i\theta}$ с $\theta \in (-\pi, 0)$ — неособые. (Указание. Примените конформное отображение.)

3. *Ряд Тейлора и породившая его функция.* Докажите или опровергните следующее утверждение. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область (открытое связное подмножество), $a \in D$, $f \in \mathcal{O}(D)$, U — круг сходимости ряда Тейлора функции f с центром в точке a, $g \in \mathcal{O}(U)$ — сумма этого ряда. Тогда $f = g$ на $D \cap U$.

4. *Вокруг теоремы Лиувилля.* (A) Покажите, что нельзя конформно отобразить всю плоскость на единичный круг. (B) Докажите или опровергните: если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то $f \equiv \mathrm{const}$. (C) Докажите или опровергните: если $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ для всех $z \in \mathbb{C}$, то $f(z) \equiv cg(z)$ для некоторой константы c. (D) Пусть $f \in \mathcal{O}(0)$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)$ сходится. Покажите, что тогда $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. Приведите пример такой функции f, отличной от полинома.

5. *Необычный бином Ньютона.* (A) Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ положим $C_\alpha^0 := 1$ и $C_\alpha^n := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ при $n = 1, 2, \dots$, а также определим функцию $\zeta^\alpha := e^{\alpha \ln \zeta}$ на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, где $\ln\zeta := \ln|\zeta| + i \arg\zeta$, $-\pi < \arg\zeta < \pi$. Покажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n z^n = (1+z)^\alpha$ при $|z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Выведите отсюда равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \text{при} \quad |x| < \frac{1}{4}.$$

(B) Докажите это равенство по-другому: подставьте $C_{2n}^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\, dz$, поменяйте местами сумму и интегрирование и найдите интеграл с помощью вычетов. (C) Тем же приемом вычислите $\sum_{n=0}^{\infty} C_{3n}^n x^n$ хотя бы в случае, когда $x = b/(b+1)^3$ для некоторого $b > 1$. (D) Найдите радиус сходимости последнего ряда с помощью леммы: если $a_n > 0$ и $a_{n+1}/a_n \to A$, то $\sqrt[n]{a_n} \to A$.

6. *Вокруг теоремы единственности.* (A) Функции $f_1(z) = z^2 \sin(1/z)$ и $f_2(z) \equiv 0$ совпадают на множестве $\{\frac{1}{\pi n} \mid n = 1, 2, \dots\}$, имеющем предельную точку 0, но $f_1 \not\equiv f_2$. Почему это не противоречит теореме единственности? (B) Пусть $f \in \mathcal{O}(0)$ и для каждой точки z в окрестности 0 найдется номер n (зависящий от z), для которого $f^{(n)}(z) = 0$. Покажите, что f — полином. (C) Существует ли $f \in \mathcal{O}(0)$ с $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ при $n \geqslant n_0$? (D) То же для $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$. (E) То же для $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. (F) Пусть $f \in \mathcal{O}(0)$ и $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1})$ для всех $n \geqslant n_0$. Покажите, что $f \equiv \mathrm{const}$. (G) Докажите или опровергните: если $f \in \mathcal{O}(0)$ и существует последовательность $a_n > 0$, монотонно стремящаяся к 0, для которой $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ при $n \geqslant n_0$, то $f \equiv \mathrm{const}$. (H) Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $|f(x)| = 1$ при $0 < x < 1$. Покажите, что $|f(x)| = 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$.