Комплексный анализ. Задачи к лекции 4. 4 марта 2014 г.
(окончательный вариант: условие задачи **6** изменено)

1. *Разложения в ряд Лорана.* (A) Разложите функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ в ряд по целым степеням z в кольцах $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z|$. (B) Найдите главную часть ряда Лорана функции $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ в точке $z = i$. (C) Покажите, что $w = \operatorname{tg} z$ конформно отображает $\{\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{3\pi}{4}\}$ на $\{|w| > 1\} \cup \{\infty\}$. Разложите обратное отображение в ряд Лорана в области $\{|w| > 1\}$ (см. при необходимости листок 2, задача **4**(B)).

2. *В нуле и на бесконечности.* Пусть

$$f(z) = \frac{1}{1 + 2z + 3z^2 + \cdots + 2014z^{2013}}.$$

(A) Найдите $f^{(n)}(0)$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, 4028$. (B) Покажите, что разложение $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/z^n$ заведомо сходится при $|z| > 1$ и найдите c_n для всех $n = 0, 1, 2, \ldots, 2014$.

3. *Изолированные особые точки.* (A) Пусть $f \in \mathcal{O}(0 < |z| < 1)$ и функция $|z|^{\pi+e}|f(z)|$ ограничена при $z \to 0$. Покажите, что функция $|z|^5|f(z)|$ тоже ограничена при $z \to 0$. (B) Для любой ли функции $f \in \mathcal{O}(|z| > 10)$ найдется целая функция $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ такая, что $f(z) - g(z) \to 0$ при $z \to \infty$? (C) Можно ли конформно отобразить $\mathbb{C}$ без n точек на круг без n точек? (D) Существует ли функция $f \in \mathcal{O}(|z| > 1)$ такая, что $|f(z)| \geqslant e^{|z|}$ при $|z| > 1$? (E) Пусть $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ и функция $f \in \mathcal{O}(K)$ ограничена в некоторой окрестности множества K. Покажите, что существуют пределы $b_n = \lim_{z \to 1/n} f(z)$ и $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. (F) Верно ли, что всякая $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ с $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ является полиномом? (G) Пусть D — круг с центром a. На лекции мы вывели из неравенств Коши, что всякую ограниченную $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a\})$ можно доопределить при $z = a$ до функции, голоморфной всюду на D. Докажите это по-другому, применив теорему Мореры к функции $(z - a)f(z)$.

4. *Вокруг теоремы Сохоцкого.* (A) Пусть D — круг с центром a и последовательность $a_n \in D \setminus \{a\}$ сходится к a при $n \to \infty$, а функция $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a, a_1, a_2, \ldots\})$ имеет в каждой из точек a_n полюс. Покажите, что для любого $w_0 \in \mathbb{C}$ найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что $f(z_n) \to w_0$ при $n \to \infty$. (B) Докажите, что нельзя конформно отобразить $\mathbb{C}$ ни на какую область $D \subset \mathbb{C}$, отличную от $\mathbb{C}$. (C) Всякое конформное отображение $\mathbb{C}$ на себя имеет вид $w = az + b$ для некоторых $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$. (D) Всякое конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя дробно-линейно. (E) Если $f \in \mathcal{O}(0 < |z| < \varepsilon)$ имеет при $z = 0$ неустранимую особую точку, то $e^{f(z)}$ имеет там существенно особую точку. (F) Остается ли это верным для $g(f(z))$, где $g(w)$ — любая целая функция, отличная от полинома? (G) Верно ли, что если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\operatorname{Re} f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, то f — полином?

5. *Гармонические функции.* Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $u : D \to \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если $u \in C^2(D)$ и $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в D. (A) Если $f \in \mathcal{O}(D)$, то функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ гармоничны в D. (B) Гармоническая функция $u(z)$ на D имеет вид $u = \operatorname{Re} f$ для некоторой $f \in \mathcal{O}(D)$ тогда и только тогда, когда функция $u_x - iu_y \in \mathcal{O}(D)$ имеет первообразную в D.

(C) Всякая гармоническая в круге функция есть вещественная часть некоторой голоморфной в этом круге функции. (D) Всякая гармоническая функция бесконечно дифференцируема и даже вещественно-аналитична. (E) Докажите или опровергните: если функция $u(x+iy) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} x^n y^m$ гармонична в некоторой окрестности точки $z = 0$ и все $a_{nm} \geqslant 0$, то u — полином от x, y степени не выше 2. (F) Функция $\ln|z|$ гармонична в любом кольце $D_{ab} := \{a < |z| < b\}$, $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$, но не равна $\operatorname{Re} f$ ни для какой функции $f \in \mathcal{O}(D_{ab})$. (G) Верно ли, что всякую гармоническую функцию $u : D_{ab} \to \mathbb{R}$ можно записать в виде $u(z) = A \ln|z| + \operatorname{Re} f(z)$ для некоторых $A \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{O}(D_{ab})$? (H) Верно ли, что всякая гармоническая функция $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ либо сюръективна, либо постоянна?

6. *Разделение особенностей.* (A) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $K \subset D$ — компакт. Покажите, что для любой функции $f \in \mathcal{O}(D \setminus K)$ найдутся функции $f_1 \in \mathcal{O}(D)$ и $f_2 \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$ такие, что $f = f_1 - f_2$ на $D \setminus K$. (*Указание.* Фиксировав $z \in D \setminus K$, постройте ограниченные области D_1, D_2 с кусочно-гладкими границами такие, что $K \subset D_2$, $z \in D_1 \setminus \overline{D}_2$, $\overline{D}_1 \subset D$. Запишите $f(z)$ как интеграл по $\partial(D_1 \setminus \overline{D}_2)$ с помощью интегральной формулы Коши. Тогда интеграл по ∂D_1 даст $f_1(z)$, а интеграл по ∂D_2 даст $f_2(z)$.) (B) Покажите, что функции f_1, f_2 определяются по f однозначно с точностью до прибавления к ним одной и той же константы. (C) Если для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть K конечным набором кругов с суммой радиусов $< \varepsilon$, то для любой ограниченной $f \in \mathcal{O}(D \setminus K)$ найдется $F \in \mathcal{O}(D)$ такая, что $F = f$ на $D \setminus K$. (*Указание.* В этом случае $f_2 \equiv 0$. Сравните с **3**(G).) (D) Проверьте, что условие (C) выполнено для всех не более чем счетных компактов, а также для канторова множества $K = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} \mid a_n = 0 \text{ или } 1\}$. (E) Укажите ограниченную $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [0,1])$, не равную $F|_{\mathbb{C} \setminus [0,1]}$ ни для какой $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. (F) Пусть $U = \{|z| < 1\}$. Приведите пример ограниченной $f \in \mathcal{O}(U)$ такой, что $f \notin C(\overline{U})$.

7. *Слишком много первообразных.* Пусть $D = \{1 < |z| < 2\}$ и $f \in \mathcal{O}(D)$ имеет для каждого $n = 1, 2, \ldots$ n-ую первообразную $g_n \in \mathcal{O}(D)$, т.е. $g_n^{(n)} = f$ на D. Покажите, что f можно доопределить при $|z| \leqslant 1$ так, что $f \in \mathcal{O}(|z| < 2)$.

8. *Сумма ряда через его особенности.* (A) Докажите тождество

$$(*) \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\ln z + 2\pi i n)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

где $\ln z$ означает любое фиксированное значение логарифма (от его выбора сумма ряда не зависит). Для этого выведите из теоремы Вейерштрасса, что левая часть $f(z)$ доказываемого равенства голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Заметьте, что $f(1/z) = f(z)$ и опишите особенности $f(z)$ при $z = 0, 1, \infty$. После этого примените описание функций, мероморфных на $\overline{\mathbb{C}}$. (B) Пользуясь равенством (*) при $z = -1$, найдите $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. (C) Перепишите (*) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Интегрируя, а затем интегрируя и потенцируя, выведите формулы

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \qquad \sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$