Комплексный анализ. Задачи к лекции 7. 25 марта 2014 г.

1. *Действия над аналитическими функциями.* (A) Для каждого $a \in \mathbb{C}$ укажите, на сколько различных АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ распадается сумма $\ln z + a \ln z$. (B) Приведите пример АФ $\mathcal{F}$ такой, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}+1$. (C) Существует ли АФ $\mathcal{F} \not\equiv 0$, для которой $2\mathcal{F} = \mathcal{F}$? (D) Покажите, что $\mathcal{F}(z) = z^z$ есть АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ с числом листов ∞, несмотря на то, что число различных значений, принимаемых ею в точке $z = 1/n$ равно n для $n = 1, 2, \ldots$.

2. *Описание точек ветвления.* Пусть $\mathcal{F}$ – АФ в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a \in \partial D$ – изолированная граничная точка. *Описать особенность $\mathcal{F}$ в точке a* – значит указать, на сколько различных АФ распадается $\mathcal{F}$ при сужении на (лежащую в D) малую проколотую окрестность точки a и к какому из 5 типов (устранимая, полюс, существенно особая, точка ветвления n-го порядка, логарифмическая точка ветвления) принадлежит a для каждой из этих АФ. (A) Пусть $f \in \mathcal{O}(a)$. Покажите, что $\sqrt{f(z)}$ имеет при $z = a$ точку ветвления 2-го порядка тогда и только тогда, когда $f(z)$ имеет при $z = a$ нуль нечетного порядка. Иначе $\sqrt{f(z)}$ имеет при $z = a$ две устранимые особые точки. (B) Опишите все особые точки (включая ∞) следующих АФ (выражений): $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$, $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z-1}$, $\sqrt{1+\sqrt{z}}$. (C) То же для $\operatorname{arctg} z$ (см. листок 3, задача **1**(B)), $\arcsin z$ (может пригодиться формула $\arcsin z = \operatorname{arctg}(z/\sqrt{1-z^2})$), $\sqrt[3]{\ln z}$, $\sqrt{1-\cos z}$.

3. *Формула Римана–Гурвица.* (A) Пусть $P(z, w)$ – неприводимый полином с комплексными коэфициентами, а $\mathcal{F}$ – такая АФ на $\mathbb{C} \setminus \{\text{конечное множество}\}$, что $P(z, w) = 0 \iff w = \mathcal{F}(z)$. Покажите, что

$$2 - 2g = 2m - \sum (k_j - 1),$$

где g есть род алгебраической кривой $\{P(z, w) = 0\}$, m есть число листов $\mathcal{F}$, сумма берется по всем особым точкам $\mathcal{F}$ (включая ∞), а k_j означает порядок ветвления в j-ой особой точке. (B) Вычислите род во всех примерах пункта **2**(B), а также для $w = \sqrt{z^n - 1}$, $w = \sqrt[n]{z^2+1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $w = \frac{1}{(1+\sqrt{z})(1+\sqrt[6]{z})}$.

4. *Возможности и невозможности.* (A) Приведите пример 4-значной АФ на $\mathbb{C} \setminus \{\text{конечное множество}\}$, не имеющей нигде (в том числе над ∞) никаких особенностей, кроме точек ветвления 2-го порядка. (B) Для каких $N \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ существует АФ как в (A) с ровно N точками ветвления? (C) Существует ли 4-значная АФ на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ имеющая при $z = 0$ точку ветвления 3-го порядка и устранимую особую точку?

5. *Вычисление значений ветвей.* В этой задаче $L := (-\infty, 0]$, $N := [5, +\infty)$, $M_\pm := \{1 \pm iy \,|\, y \geqslant 0\}$. (A) Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus L)$ и $f(x) = x^x$ при $x > 0$. Найдите $f(i)$. (B) Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (L \cup M_+))$ и $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} > 0$ при $x > 1$. Найдите $f(1/2)$. (C) То же с заменой M_+ на M_-. (D) Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (-iL \cup M_- \cup N))$ и $f(x) = \ln(2\sqrt{x} - \sqrt{5-x})$ при $1 < x < 4$. Найдите $f(-4)$. (E) Найдите $f(-i)$, если $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (L \cup M_+))$ и $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{\pi} + \frac{\pi}{\ln x}}$ при $x > 1$. (F) Вычислить $\int_0^\pi \operatorname{tg}(x + iy)\, dx$ для всех $y > 0$.

6. *Голоморфные корни, логарифмы и другие ветви.* (A) Покажите, что не существует $f \in \mathcal{O}(0 < |z| < 1)$ такой, что $f(z)^2 = z$ при $0 < |z| < 1$. (B) Пусть

$D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область. Покажите, что функция $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \not\equiv 0$, имеет вид $f = g^2$ для некоторой $g \in \mathcal{O}(D)$ тогда и только тогда, когда порядки всех нулей f в D четны (ср. с задачей **2**(A)). (C) Пусть $U = \{|z| < 1\}$. Найдите такое число $A \in \mathbb{C}$, что всякая $f \in \mathcal{O}(U)$ с $\pm A \notin f(U)$ имеет вид $f = g^3 - g$ для некоторой $g \in \mathcal{O}(U)$. (D) Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $f(z)^2 + g(z)^2 = 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Покажите, что $f(z) = \cos h(z)$ и $g(z) = \sin h(z)$ для некоторой $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. (E) Пусть $D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$. Покажите, что существует единственная $f \in \mathcal{O}(D)$ такая, что $f(z)^2 = 1 - z^2$ и $f(0) = 1$. Выведите, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + z\sin\theta} = \frac{2\pi}{f(z)} \qquad \text{для всех} \qquad z \in D.$$

(F) Пусть $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $f(z) = z^2 - 1$. Покажите, что можно записать $f = g^2$ для некоторой $g \in \mathcal{O}(D)$, но нельзя записать $f = e^h$ ни для какой $h \in \mathcal{O}(D)$. (G) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Покажите, что АФ $z^\alpha(1 - z)^\beta$ допускает выделение однозначной ветви на $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$.

7. *Интегралы с многозначными функциями.* (A) Интегрируя надлежащую ветвь АФ $\frac{\ln(1+iz)}{z(z^2+a^2)}$ по границе области $\{\operatorname{Im} z < 0,\ |z| < R\}$, найдите $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(x^2+a^2)}\,dx$ при всех $a > 0$. (B) Интегрируя надлежащую ветвь АФ $\frac{(\ln z)^2}{1+z+z^2}$ по границе области $\{\varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg z < 2\pi\}$, вычислите $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\,dx$. (C) Подобным же образом или по-другому найдите $\int_0^\infty \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^3 dx$. (D) Интегрируя $\frac{f(z)}{z^2+a^2}$ по границе области $\{|z| < R\} \setminus [0, 1]$ (где $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [0, 1])$ есть надлежащая ветвь $z^\alpha(1-z)^{1-\alpha}$, см. задачу **6**(G)), найдите $\int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)^{1-\alpha}}{x^2+a^2}\,dx$ для всех $a > 0$, $0 < \alpha < 1$.

8. *Продолжение степенных рядов.* Покажите, что следующие ростки задают АФ $w = \mathcal{F}(z)$ на областях вида $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\text{конечное множество}\}$, укажите в каждом случае наибольшую возможную область D и число листов $\mathcal{F}$ на D: (A) $\sum_{n=1}^\infty n^\alpha z^n$, $\alpha = 0, 1, 2, -1, -2$; (B) то же для $\alpha = -1/2$ (см. листок 3, задача **1**(E)); (C) $z - z^3/3 + z^5/5 - \ldots$ (ср. с задачей **2**(C)); (D) $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, где $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.