Комплексный анализ. Задачи к лекциям 8 и 9. 1 и 8 апреля 2014 г.

1. *Вокруг задач на экстремум.* (A) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, отличная от всей плоскости, а $U = \{w \in \mathbb{C} \,|\, |w| < 1\}$ — единичный круг. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех функций $f \in \mathcal{O}(D)$ таких, что $f(D) \subset \overline{U}$, и фиксируем произвольную точку $a \in D$. Покажите, что величина $M_a(D) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)|$ достигается на конформном отображении $F : D \to U$ с $F(a) = 0$. (B) Вычислите $M_a(D)$ для всех $a \in D$ в случаях, когда D есть круг $\{|z| < R\}$, полуплоскость $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, полоса $\{-1 < \operatorname{Im} z < 1\}$. (C) Некто утверждает, что для любой функции $g \in \mathcal{O}(D)$ с $g(a) = 0$ и $g'(a) = 1$ найдется (своя) точка $z \in D$ такая, что $|g(z)| > 1/M_a(D)$. Покажите, что это утверждение верно для всех указанных функций g, кроме одной. Какой? (D) Что происходит с $M_a(D)$ при стремлении a к ∂D? А при увеличении области D с фиксированной точкой a? (E) Найдите $\sup |f'(0)|$ по всем функциям $f \in \mathcal{O}(U)$ таким, что $f(U) \subset \overline{U} \setminus \{0\}$. Достигается ли этот sup?

2. *Выпуклая оболочка образа круга.* (A) Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$, $f(0) = 1$ и $\operatorname{Re} f \geqslant 0$ на U. Покажите, что $|f'(0)| \leqslant 2$. (B) Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Докажите, что выпуклая оболочка множества $f(U)$ содержит круг $\{|w| < 1/2\}$. (C) Покажите на примере, что $1/2$ в задаче (B) нельзя заменить ни на какую бóльшую константу.

3. *Безвихревые несжимаемые течения.* (A) Покажите, что в ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ с гладкой связной границей нельзя создать течение без особых точек. На более математическом языке: если $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ и $\operatorname{Im} f \equiv \mathrm{const}$ на ∂D, то $f \equiv \mathrm{const}$ на D. (B) Пусть $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Течение с комплексным потенциалом $f(z) = A/z$ на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (а также особенность этого течения в начале координат) называется *диполем.* Покажите, что линии тока указанного течения — окружности и два луча. (C) Найдите комплексный потенциал течения в единичном круге, созданного диполем в начале координат. При каком A получится функция Жуковского? (D) Пусть D — такая область, как в задаче (A). Покажите, что комплексный потенциал течения в D, созданного диполем в точке $a \in D$, конформно отображает D на всю расширенную комплексную плоскость без некоторого горизонтального отрезка. Как связана длина этого отрезка с коэффициентом A, входящим в определение диполя?

4. *Построение конформных отображений с помощью принципа симметрии.* Найдите конформные отображения следующих областей на единичный круг: (A) $\overline{\mathbb{C}} \setminus ([-i, i] \cup [-1, +\infty))$; (B) $\overline{\mathbb{C}} \setminus ([1, 2] \cup \{2e^{i\theta} \,|\, -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\})$; (C) $\overline{\mathbb{C}} \setminus ([-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2] \cup \{e^{i\theta} \,|\, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\})$; (D) $\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x > \sqrt{Ay^2 + B}\}$, $A, B > 0$; (E) $\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > x^2\}$; (F) $\{|z| < 2\} \setminus ([1, 2] \cup [\omega, 2\omega] \cup [\omega^2, 2\omega^2])$, $\omega := e^{2\pi i/3}$.

5. *Вокруг принципа симметрии.* (Теорема Каратеодори считается известной.) (A) Пусть $D_{ab} := \{a < |z| < b\}$. Покажите, что D_{ab} можно конформно отобразить на D_{cd} тогда и только тогда, когда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (B) Покажите, что нельзя конформно отобразить квадрат на прямоугольник, отличный от квадрата, так, чтобы вершины перешли в вершины. (C) Всякое конформное отображение прямоугольника на полуплоскость аналитически продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}$ с бесконечным множеством полюсов. (D) Пусть функция

$w = f(z)$ конформно отображает полуплоскость на полосу, из которой удалены несколько лучей, параллельных сторонам полосы. Покажите, что функция $f'(z)$ рациональна. Проверьте это явным вычислением в случае, когда лучи (один или два) лежат на средней линии полосы. (E) Пусть f конформно отображает круг $\{|z| < 1\}$ на эллипс $\{u + iv \in \mathbb{C} \,|\, (\frac{u}{A})^2 + (\frac{v}{B})^2 < 1\}$, $A > B > 0$, причем $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = 0$. Покажите, что f допускает продолжение до АФ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\text{две точки}\}$ и опишите особенности в этих точках. (*Указание.* Сведите к случаю, когда $A = \frac{1}{2}(R + \frac{1}{R})$ и $B = \frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$ для некоторого $R > 1$ и примените функцию Жуковского.) (F) Существуют ли не равные тождественно нулю функции $f \in \mathcal{O}(|z| < 1) \cap C(|z| \leqslant 1)$ такие, что $\operatorname{Re} f(e^{i\theta}) = 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $\operatorname{Im} f(e^{i\theta}) = 0$ при $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$?

6. *О двух классах полиномов.* Для некоторых полиномов $P(u, v)$ с вещественными коэффициентами, из условий $f \in \mathcal{O}(U) \cap C(\overline{U})$ и $P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \equiv 0$ на ∂U вытекает, что $f \equiv \text{const}$. Например, это так для $P(u, v) = u$ (см. задачу **4**(B) листка 5 и задачу **3**(A) выше), но не так для $P(u, v) = u^2 + v^2$ (можно взять $f(z) = z$). Чем отличаются друг от друга полиномы этих классов? В частности, при каких $C \in \mathbb{R}$ полином $v^2 - u^3 + Cu$ принадлежит первому классу?