ЛЕКЦИИ 8–11.

1. Симплектическая структура на кокасательном расслоении

Пусть $M = T^*N$ — кокасательное расслоение к гладкому многообразию N. Касательное пространство $T_{(a,\nu)}M$, где $a \in N$ и $\nu \in T_a^*N$, канонически изоморфно $T_aN \oplus T_a^*N$ (почему?). Это позволяет определить 1-форму α на M формулой $\alpha(a,\nu)(v,\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \nu, v\rangle$, где $v \in T_aN$, $\mu \in T_a^*N$. Если $q_1, \dots, q_n$ — координаты на N в окрестности a, и $p_1, \dots, p_n$ — соответствующие координаты на T_a^*N (определяемые равенством $\mu = \sum_{i=1}^n p_i(\mu)\, dq_i$ для произвольной $\mu \in T_a^*N$), форма α имеет вид $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i\, dq_i$. Ее дифференциал $\omega \stackrel{\text{def}}{=} d\alpha = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, очевидно, невырожден в каждой точке и замкнут (потому что точен), так что является симплектической структурой.

Гладкое отображение $f : N \to M$ произвольного многообразия в симплектическое называется изотропным, если $f^*\omega = 0$, где ω — симплектическая структура на M. Подмногообразие $N \subset M$ называется лагранжевым, если $\dim N = \dim M/2$ и вложение $\iota : N \hookrightarrow M$ является изотропным отображением.

Произвольной 1-форме φ на N можно сопоставить ее график — подмногообразие $\Gamma_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, \varphi(a)) \in T_a^*N \mid a \in N\} \subset T^*N$. Очевидно, $\dim \Gamma_\varphi = \dim N = \dim T^*N/2$. Как легко видеть, $T_{(a,\varphi(a)}\Gamma_\varphi = \varrho_\varphi(T_aN)$, где $\varrho_\varphi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{(v, \mathcal{L}_v\varphi) \in T_aN \oplus T_a^*N = T_{(a,\varphi(a)}T^*N$. Тогда из определения формы α на T^*N вытекает, что $\varrho_\varphi^*\alpha = \varphi$, и, следовательно, $\varrho_\varphi^*\omega = d\varphi$. Отсюда вытекает, что многообразие $\Gamma_\varphi \subset T^*N$ лагранжево (относительно определенной выше симплектической структуры на T^*N) тогда и только тогда, когда форма φ замкнута.

2. Симплектические листы

Пусть M — гладкое многообразие, и пусть для каждого $a \in M$ задан линейный оператор $\psi(a) = T_a^*M \to T_aM$, гладко зависящий от a; иными словами, $(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha, \psi(a)\beta\rangle$ — билинейная форма на пространстве T_a^*M. Тогда на множестве $C^\infty(M)$ можно определить операцию $\{f, g\}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (df(a), dg(a)) = \langle df(a), \psi(a)dg(a)\rangle$.

Теорема 1. *1) Операция $\{\cdot,\cdot\}$ билинейна и является дифференцированием по первому и второму аргументу: $\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}$, $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$.*
2) Любая билинейная операция на $C^\infty(M)$, являющая дифференцированием по первому и второму аргументу, есть $\{\cdot,\cdot\}$ для некоторого тензора ψ.
3) Операция $\{,\}$ кососимметрична тогда и только тогда, когда $\psi(a)^* = -\psi(a)$ для всех a.
4) Если оператор $\psi(a)$ для всех $a \in M$ кососимметричен и обратим, то 2-форма ω на M, заданная равенством $\omega(a)(\xi, \eta) = \langle \psi^{-1}(a)\xi, \eta\rangle$, замкнута тогда и только тогда, когда операция $\{\cdot,\cdot\}$ удовлетворяет тождеству Якоби: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Утверждение 2 является следствием теоремы об общем виде дифференцирования алгебры $C^\infty(M)$. Утверждение "тогда" из пункта 3 очевидно, а утверждение "только тогда" вытекает из теоремы о разбиении единицы (докажите!).

Для доказательства утверждения 4 введем в окрестности точки $a \in M$ координаты x^i, $i = 1, \dots, n$, и пусть $\{x^i, x^j\}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{ij}(x)$ — тензор ψ в этих координатах. Тогда тождество Якоби эквивалентно равенству $\sum_i \pi^{pi}\frac{\partial \pi^{qr}}{\partial x_i} + \pi^{qi}\frac{\partial \pi^{rp}}{\partial x_i} + \pi^{ri}\frac{\partial \pi^{pq}}{\partial x_i} = 0$ для всех $p, q, r = 1, \dots, n$ в произвольной точке окрестности.

Дифференциальная форма ω задается в тех же координатах формулой $\omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, где $\omega_{ij}\psi^{jk} = \delta_i^k$ (подразумевается суммирование от 1 до n по повторяющимся индексам; $\delta_i^k = 1$ при $i = k$ и 0 иначе). Дифференцируя по x^s, получим $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_s}\psi^{jk} + \omega_{ij}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_s} = 0$. Умножая на ω_{km}, получим $\frac{\partial \omega_{im}}{\partial x_s} = -\omega_{km}\omega_{ij}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_s}$. Переставляя индексы по циклу, получим $\frac{\partial \omega_{ms}}{\partial x_i} = -\omega_{ks}\omega_{mj}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial \omega_{si}}{\partial x_m} = -\omega_{ki}\omega_{sj}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_m}$. Замкнутость формы ω означает, что $\frac{\partial \omega_{im}}{\partial x_s} + \frac{\partial \omega_{ms}}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_{sj}}{\partial x_m} = 0$, то есть $\omega_{km}\omega_{ij}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_s} + \omega_{ks}\omega_{mj}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_i} + \omega_{ki}\omega_{sj}\frac{\partial \psi^{jk}}{\partial x_m} = 0$. Умножая это равенство на $\psi^{mp}\psi^{iq}\psi^{sr}$, получим выписанное выше тождество Якоби в координатах. □

Билинейная кососимметрическая операция на $C^\infty(M)$, удовлетворяющая тождеству Якоби (т.е. определяющая на $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли) и являющаяся дифференцированием по обоим аргументам, называется пуассоновой скобкой на многообразии M. Согласно теореме 1, симплектическая структура на M определяет на нем пуассонову скобку.

Обратное неверно.

Пример 1 (скобка Ли–Березина). Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли с операцией $[\cdot,\cdot]$, и пусть $f, g :\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ — гладкие функции на сопряженном пространстве. Тогда для произвольной точки $a \in \mathfrak{g}^*$ имеем $df(a), dg(a) \in T_a^*\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. Определим скобку Пуассона на многообразии $\mathfrak{g}^*$ формулой $\{f,g\}(a) = \langle a, [df(a), dg(a)]\rangle$; свойства 1–4 доказываются непосредственной проверкой. Скобка линейна по $a \in \mathfrak{g}^*$ (в частности, равна нулю в начале координат).

Частный случай этой конструкции: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$, так что $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^3$. Базис в $\mathfrak{sl}_3$ составляют матрицы a_1, a_2, a_3. Матричные элементы матрицы a_1 такие: $(a_1)_{23} = -(a_1)_{32} = 1$, остальные равны нулю; матричные элементы a_2 и a_3 определяются аналогично. Имеем $[a_1, a_2] = a_3$ и аналогично при сдвиге индексов по циклу. Таким образом, $\mathfrak{so}_3$ представляет собой $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения $\times$, а пуассонова скобка функция f и g равна $\{f,g\}(x) = \langle x, \nabla f(x) \times \nabla g(x)\rangle$. Эта скобка не задана симплектической структурой: $\mathfrak{so}_3$ нечетномерно и, следовательно, не является симплектическим многообразием.

Теорема 2. *Пусть $\psi : T^*M \to TM$ — пуассонов тензор на многообразии M, и точка a такова, что для некоторой окрестности U точки a образ $L(x) \subset T_xM$ оператора $\psi(x)$ при $x \in U$ имеет постоянную размерность. Тогда подпространства $L(x), x \in U$ образуют интегрируемое распределение.*

Доказательство. Введем в окрестности U координаты $x_1, \dots, x_n$, и пусть $\psi^{ij}(x)$ — координаты пуассонова тензора. Пространство $L(x)$ порождено векторами $v_p(x) = (\pi^{ps}(x))_{s=1}^n$, $p = 1, \dots, n$. Тогда $[v_p(x), v_q(x)] = \left(\sum_{i=1}^n \pi^{pi}(x)\frac{\partial \pi^{qr}(x)}{\partial x_i} - \pi^{qi}(x)\frac{\partial \pi^{pr}(x)}{\partial x_i}\right)_{r=1}^n$. Из тождества Якоби вытекает, что $[v_p(x), v_q(x)] = \sum_{i=1}^n v_i(x)\frac{\partial \pi^{pq}(x)}{\partial x_i}$; интегрируемость теперь следует из теоремы Фробениуса. $\square$

Пусть $N \subset M$ — интегральное многообразие распределения L. По определению, $T_xN = L(x)$ и, следовательно, $T_x^*N = L(x)^\perp \subset T_x^*M$. Ограничение формы $\pi(x)$ на подпространство $L(x)^\perp$ не имеет ядра. Таким образом, на N определена пуассонова скобка с невырожденным пуассоновым тензором; обратный к нему оператор, согласно теореме 1 — симплектическая структура на N. Тем самым распределение L определяет на многообразии M (точнее, в окрестности U) слоение, на слоях которого определена симплектическая структура. Слои называются симплектическими листами.

Пример 2. Симплектическими листами скобки Ли–Березина на пространстве $\mathfrak{g}^*$ являются орбиты общего положения коприсоединенного действия группы Ли G алгебры $\mathfrak{g}$. Доказательство заключается в вычислении касательного пространства к орбите; оставляется в качестве упражнения.

3. Гамильтоновы действия и отображение момента

Пусть G — группа Ли, действующая на симплектическом многообразии M симплектоморфизмами. Иными словами, если $g \in G$, и $R_g : M \to M$ — соответствующее отображение, то $(R_g)^*\omega = \omega$ (ω — симплектическая форма). Пусть теперь $u \in \mathfrak{g} = T_eG$ — элемент алгебры Ли, представленный кривой $g(t), t \in \mathbb{R}$, $g(0) = e$, $g'(0) = u$. Тогда в произвольной точке $a \in M$ определен вектор $(\mathfrak{R}_u)(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} R_{g(t)}(a)\big|_{t=0} \in T_aM$. Таким образом определено отображение $\mathfrak{R}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли векторных полей на M; нетрудно проверить (проделайте!), что это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли: $\mathfrak{R}_{[u,v]} = [\mathfrak{R}_u, \mathfrak{R}_v]$ (в левой части равенства скобка — операция в $\mathfrak{g}$, в правой — коммутатор векторных полей).

В дальнейшем мы будем опускать обозначение для действия R и гомоморфизма $\mathfrak{R}$ и писать просто $g \in G$ и $u \in \mathfrak{g}$ вместо R_g и $\mathfrak{R}_u$.

Лемма 1. *Для произвольного $v \in \mathfrak{g}$ форма $\iota_v\omega$ замкнута.*

Доказательство. $d\iota_v\omega = (d\iota_v + \iota_v d)\omega$ (поскольку ω замкнута) $= \mathcal{L}_v\,\omega$ (формула Картана) $= 0$, поскольку $v \in \mathfrak{g}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $f, g \in C^\infty(M)$ и ψ — пуассонов тензор на M. Тогда $[\psi df, \psi dg] = \psi d\{f, g\}$.*

Доказательство. Из определения пуассонова тензора следует, что $\{f,h\} = \iota_{\psi du} dv = \mathcal{L}_{\psi du}\, v$ для произвольных $u, v \in C^\infty(M)$. Тогда для произвольной $h \in C^\infty(M)$ получим $\mathcal{L}_{[\psi df, \psi dg]}\, h = [\mathcal{L}_{\psi df}, \mathcal{L}_{\psi dg}]h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{\{f, g\}, h\}$ (тождество Якоби) $= \mathcal{L}_{\psi d\{f,g\}}\, h$. В силу произвольности h получаем утверждение леммы. $\square$

Действие группы G называется квази-гамильтоновым, если для произвольного $v \in \mathfrak{g}$ форма $\iota_v\omega$ точна, то есть существует функция H_v такая, что $\iota_v\omega = dH_v$. Если M связно (что мы будем предполагать в дальнейшем) и, следовательно, $H^0_{DR}(M) = \mathbb{R}$, то функция H_v определена с точностью до прибавления константы, зависящей от v; без ограничения общности можно считать, что константы выбраны так, что H_v зависит от v линейно. Тем самым определено отображение $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ (называемое отображением момента) такое, что $H_v(a) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mu(a), v\rangle$ для всех $a \in M$ и $v \in \mathfrak{g}$. Тем не менее, остается возможность замены $H_v \mapsto H_v + \langle b, v\rangle$, где $b \in \mathfrak{g}^*$; тем самым μ определено с точностью до прибавления константы.

Пример 3. Действие группы S^1 на многообразии $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ с симплектической формой $\omega = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$ (здесь $d\varphi$ — стандартная "угловая" 1-форма на S^1), заданное равенством $A_{e^{i\alpha}}(e^{i\beta_1}, e^{i\beta_2}) = (e^{i\beta_1+\alpha}, e^{i\beta_2})$, сохраняет симплектическую структуру, но не является квази-гамильтоновым: $\iota_{\frac{\partial}{\partial\varphi}}\omega = d\varphi_2$ — эта форма замкнута, но не точна.

Пример 4. Действие $A_{m_1,\dots,m_n}$ группы Ли $(S^1)^n$ на многообразии $\mathbb{C}^n$ с симплектической формой $\omega = i\sum_{k=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$, заданное равенством $A_{(u_1,\dots,u_n)}(z_1,\dots,z_n) = (u_1^{m_1}z_1,\dots,u_n^{m_n}z_n)$, является квази-гамильтоновым. Действительно, базис в алгебре Ли (коммутативной, то есть с нулевой скобкой) $\mathbb{R}^n$ группы $(S^1)^n$ составляют векторы $\frac{\partial}{\partial\varphi_k}$, $k = 1,\dots,n$. Отождествим $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, $k = 1,\dots,n$; тогда симплектическая форма равна $\sum_{s=1}^n dx_s \wedge dy_s$. Поле $\frac{\partial}{\partial\varphi_k}$ при действии на $\mathbb{R}^{2n}$ переходит в поле $v_k = m_k(y_k\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial y_k})$. Имеем $\iota_{v_k}\omega = m_k(x_k\,dx_k + y_k\,dy_k) = dH_{v_k}$, где $H_{v_k} = \frac{m_k}{2}(x_k^2 + y_k^2) = \frac{m_k}{2}|z_k|^2$. Отображение момента действует по формуле $\mu(z) = \frac{1}{2}(m_1|z_1|^2,\dots,m_n|z_n|^2)$.

Теорема 3. $dH_{[v_1,v_2]} = d\{H_{v_1}, H_{v_2}\}$ *для всех* $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. По определению гамильтониана, $\psi dH_v = v$. Тогда $\psi d\{H_{v_1}, H_{v_2}\} = [\psi dH_{v_1}, \psi dH_{v_2}]$ (по лемме 2) $= [v_1, v_2] = \psi dH_{[v_1,v_2]}$. Поскольку пуассонов тензор ψ порожден симплектической структурой, он обратим, откуда вытекает утверждение теоремы. □

Тем самым $C(v_1,v_2) \stackrel{\text{def}}{=} H_{[v_1,v_2]} - \{H_{v_1}, H_{v_2}\} = const$. При замене гамильтонианов $H_v \mapsto H_v + \langle b, v\rangle$ происходит замена $C(v_1,v_2) \mapsto C(v_1,v_2) + \langle b, [v_1,v_2]\rangle$.

Обозначим $C^k(\mathfrak{g})$ множество $(k+1)$-линейных кососимметрических функций $\varphi(v_0,\dots,v_k)$, где все $v_i \in \mathfrak{g}$. Символом $d : C^{k-1}(\mathfrak{g}) \to C^k(\mathfrak{g})$ обозначим линейный оператор, заданный равенством $(d\varphi)(v_0,\dots,v_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j-1}\varphi([v_i,v_j], v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_k)$.

Лемма 3. $d^2 = 0$.

Доказательство — упражнение.

Когомологии построенного комплекса называются когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (с тривиальными коэффициентами).

Лемма 4. *Функция* C *является* 1*-коциклом алгебры* $\mathfrak{g}$*; замена гамильтонианов означает прибавление к ней кограницы.*

Доказательство. $(dC)(v_0,v_1,v_2) = C([v_0,v_1],v_2) - C([v_0,v_2],v_1) + C([v_1,v_2],v_0) = \{H_{[v_0,v_1]}, H_{v_2}\} - H_{[[v_0,v_1],v_2]} +$ еще два члена с циклически переставленными индексами. В силу теоремы 3 и того факта, что скобка константы с произвольной функцией равна нулю, получаем $\{H_{[v_0,v_1]}, H_{v_2}\} = \{\{H_{v_0}, H_{v_1}\}, H_{v_2}\}$. Тем самым сумма всех 6 членов в формуле равна нулю: члены с нечетными номерами сокращаются в силу тождества Якоби для пуассоновой скобки, а члены с четными номерами — в силу тождества Якоби для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и линейной зависимости H_v от v. □

Квази-гамильтоново действие группы Ли G называется гамильтоновым, если коцикл C является кограницей (представляет нулевой элемент в когомологиях). Тогда можно заменить гамильтонианы так, чтобы коцикл стал равным нулю и выполнялось равенство $H_{[v_1,v_2]} = \{H_{v_1}, H_{v_2}\}$. Мы в дальнейшем будем предполагать, что гамильтонианы гамильтонова действия выбраны именно так.

Теорема 4. *Отображение момента* μ *является пуассоновым, то есть переводит пуассонову скобку на* M *в скобку Ли–Березина на* $\mathfrak{g}^*$*: если* $f, g : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ *— гладкие функции, то* $\{f\circ\mu, g\circ\mu\} = \{f,g\}\circ\mu$.

Доказательство. Поскольку и левая, и правая часть равенства является би-дифференцированием алгебры Ли $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, достаточно доказать теорему для случая, когда f и g — линейные функции, т.е. $f, g \in \mathfrak{g}$. В этом случае $f\circ\mu = H_f$, $g\circ\mu = H_g$, так что в левой части стоит $\{H_f, H_g\} = H_{[f,g]} = \{f,g\}\circ\mu$ по определению скобки Ли–Березина. □

4. Симплектическая редукция

Теорема 5. *Множество* $\mu^{-1}(0) = \{a \in M \mid \forall v \in \mathfrak{g}\, H_v(a) = 0\}$ *инвариантно относительно действия группы* G*. Если* 0 *— некритическое значение* μ*, то ядро ограничения* $\tilde{\omega}$ *формы* ω *на гладкое многообразие* $N \stackrel{def}{=} \mu^{-1}(0)$ *в точке* a *порождено векторами* $v(a)$*, где* v *пробегает* $\mathfrak{g}$*, а векторное поле* $v \in \mathfrak{g}$*,* $v \neq 0$*, не имеет нулей.*

Доказательство. Если $\mu(a) = 0$, то $H_w(a) = 0$ для всякого $w \in \mathfrak{g}$. Пусть $u, v \in \mathfrak{g}$, тогда $(\mathcal{L}_u H_v)(a) = \{H_u, H_v\}(a) = H_{[u,v]}(a) = 0$. Отсюда вытекает первое утверждение теоремы.

Если 0 — регулярное значение μ, то $N = \mu^{-1}(0) = \{a \mid H_v(a) = 0\, \forall v \in \mathfrak{g}\}$ — гладкое многообразие по теореме о неявной функции. Поскольку форма ω невырожденная, то $\xi \in T_a\mu^{-1}(0)$ принадлежит ядру ее ограничения на N, если $\iota_\xi \omega(a)$ принадлежит аннулятору $T_a N \subset T_a M$, т.е. $\iota_\xi \omega(a) = dH_v(a) = \iota_v \omega(a)$ для некоторого $v \in \mathfrak{g}$. В силу той же невырожденности ω отсюда вытекает $\xi = v$.

Если $\mu(a) = 0$ и $v(a) = 0$, где $v \in \mathfrak{g}$, то $dH_v(a) = 0$. Но тогда $\mu'(a)v = 0$, и a является критической точкой μ. $\square$

Отсюда вытекает, что для произвольной точки $a \in \mu^{-1}(0)$ существует подмногообразие $N_{G,a} \subset \mu^{-1}(0)$, проходящее через a и трансверсальное к орбитам действия группы G. Ограничение ω на $N_{G,a}$ не имеет ядра, так что $N_{G,a}$ — симплектическое подмногообразие. Оно называется симплектическим фактором M по действию G и обозначается $M /\!\!/ G$.

Пример 5. Фактор $\mathbb{C}^n /\!\!/ S^1$ по действию $u(z_1, \ldots, z_n) = (uz_1, \ldots, uz_n)$ изоморфен $\mathbb{C}P^{n-1}$. Действительно, алгебра Ли группы S^1 одномерна; поле $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ соответствует полю $\sum_{s=1}^n x_s \frac{\partial}{\partial y_s} - y_s \frac{\partial}{\partial x_s}$ на $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, где $z_s = x_s + i y_s$. Тогда $\iota_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} \omega = dH$, где $H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n |z_s|^2 - b$ для произвольной константы $b \in \mathbb{R}$. Теперь $N = \mu^{-1}(0)$ — сфера $\{z \mid \sum_{s=1}^n |z_s|^2 = 2b\}$, а естественная проекция $\mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/S^1 = \mathbb{C}^n /\!\!/ S^1$ — расслоение Хопфа.