Кривые на плоскости и в пространстве

Задача 1. Докажите, что кривизна плоской кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Задача 2. Пусть три точки на плоской кривой лежат в общем положении, то есть не на одной прямой. Тогда через них можно провести единственную окружность. Устремим все три точки теперь к какой-то одной точке P на данной кривой. Найти радиус предельной окружности.

Задача 3. Докажите, что (а) если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая; (б) если кручение кривой тождественно равно нулю, то кривая лежит в плоскости. (в) Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением. (б) Докажите, что кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

Задача 4. Найдите точки экстремума кривизны (а) параболы; (б) эллипса. Определите радиусы кривизны в этих точках.

Задача 5. Рассмотрим на плоскости кривой функцию $S_q(t) = \|\gamma(t) - q\|^2$ квадрата расстояния до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что

(а) точка q принадлежит нормали к кривой тогда и только тогда, когда $S'(t) = 0$ (т.е. окружность с центром в q, проходящая через $\gamma(t)$, касается кривой);

(б) q является центром кривизны тогда и только тогда, когда $S'(t) = S''(t) = 0$ (т.е. окружность кривизны имеет более высокий порядок касания с кривой);

(в) $\gamma(t)$ к тому же является точкой экстремума кривизны тогда и только тогда, когда $S'(t) = S''(t) = S'''(t) = 0$ (т.е. в точках экстремума кривизны окружность кривизны имеет еще более высокий порядок касания с кривой).

Задача 6. Нарисуйте эволюту (множество центров кривизны) параболы и эллипса.

Задача 7.* Докажите, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.