НМУ, Дифференциальная геометрия (2-й семестр). Листок 3. 28 февраля 2014 г.

Римановы поверхности

Задача 1. (а) Докажите, что произведение сфер $S^{k_1} \times S^{k_2} \times \ldots \times S^{k_n}$ вкладывается в евклидово пространство на единицу большей размерности ($\mathbb{R}^{k_1+\ldots+k_n+1}$).

(б) Пусть замкнутое n-мерное многообразие M^n вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что $M^n \times S^k$ вкладывается в $\mathbb{R}^{n+k+1}$.

Задача 2. Найдите выражение для евклидовой метрики $dx^2 + dy^2$ на плоскости в полярных координатах.

Задача 3. Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(а) найдите первую квадратичную форму, перепишите ее в сферических координатах; в полярных координатах на плоскости Oxy при стереографической проекции из точки $(0, 0, 1)$; в декартовых координатах на той же плоскости;

(б) найдите длину окружности и площадь круга радиуса ρ;

(в) определите вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны.

а также гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Псевдосферой, или *плоскостью Лобачевского*, называется одна из компонент (скажем $z > 0$) двуполостного гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. Метрика на псевдосфере задается ограничением на нее *псевдоевклидовой* метрики $dx^2+dy^2-dz^2$. Центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ переводит псевдосферу в круг $x^2 + y^2 < 1$ (модель Пуанкаре). Дробно-линейное преобразование $w = i\frac{1-z}{1+z}$, переводит круг $|z|^2 < 1$ в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im\,w} > 0$ (модель Клейна).

Задача 4. Убедитесь, что квадратичная форма на псевдосфере, заданная таким образом, положительно определена и является, тем самым, метрикой. Вычислите метрику на плоскости Лобачевского во всех трех моделях и найдите ее кривизну.