

Геодезические, параллельный перенос

Задача 1. (а) Докажите, что если две поверхности в \mathbb{R}^3 касаются вдоль кривой (в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

(б) Докажите, что если две поверхности в \mathbb{R}^3 касаются вдоль кривой, которая является геодезической на одной поверхности, то она является геодезической и на другой.

(в) Докажите, что если две поверхности в \mathbb{R}^3 пересекаются по кривой, которая является геодезической на обеих поверхностях, причем касательные плоскости к поверхностям не совпадают (пересечение трансверсально), то эта кривая является прямой.

Задача 2. Докажите, что символы Кристоффеля поверхности вращения

$$r(u^1, u^2) = (u^1, f(u^1) \cos u^2, f(u^1) \sin u^2)$$

имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f''}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{ff'}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Задача 3. (а) Найдите оператор переноса на прямом круговом цилиндре в \mathbb{R}^3 . Как он зависит от кривой?

(б) На какой угол повернется касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α ?

(в) Для поверхности вращения найдите результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Задача 4. Найдите геодезические на сфере, цилиндре и круговом конусе в \mathbb{R}^3 .

Задача 5. Докажите, что длина окружности и площадь круга малого радиуса ε на римановой поверхности имеют вид

$$L(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + A\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \quad S(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2 + B\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4).$$

Выразите константы A и B через гауссову кривизну.