

Домашнее задание 2

Пусть $V = \mathbb{C}[x, y]$ — пространство многочленов от двух переменных, и пусть $V_n \subset V$ — подпространство однородных многочленов степени n , где $n \geq 0$. Определим представление $R: \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{End}(V)$ следующим образом:

$$R\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) P(x, y) = P(ax + cy, bx + dy).$$

Очевидно, подпространство V_n является подпредставлением в V , причем $\dim V_n = n + 1$.

1.1. Рассмотрим подгруппу (максимальный тор)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Разложите V_n в сумму неприводимых представлений группы T .

УКАЗАНИЕ. Все представления абелевой группы одномерны.

Рассмотрим следующие элементы в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2 = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эти элементы образуют базис алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 .

1.2. а) Найдите коммутационные соотношения между этими элементами (=вычислите $[E, F]$, $[H, E]$ и $[H, F]$).

б) Пусть $t \in \mathbb{C}$. Вычислите $\exp tE$, $\exp tF$ и $\exp tH$.

1.3. Опишите действие элементов алгебры Ли $dR(E)$, $dR(F)$, $dR(H)$ в пространстве V_n либо явным образом (может быть полезно рассмотреть стандартный базис $x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n$ пространства V_n), либо при помощи дифференциальных операторов первого порядка, действующих на однородных многочленах от переменных x, y .

УКАЗАНИЕ. Используйте предыдущее упражнение и следующий факт: если $f: G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли, а $df: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ — его дифференциал, то для всякого $X \in \mathfrak{g}$

$$df(X) = \frac{d}{dt} f(\exp tX)|_{t=0}.$$

1.4. Покажите, что при любом $n \geq 0$ пространство V_n является неприводимым представлением группы Ли $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (или, что то же самое, алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$).

В лекции от 13 марта (будет) показано, что всякое неприводимое представление группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ изоморфно V_n при некотором $n \geq 0$.

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 15:30 (т.е. до начала лекции) 20 марта 2014 г.