Домашняя экзаменационная работа. 14 мая.

Задача 1. Вычислите гомологии и когомологии следующей локальной системы на букете из двух окружностей. Слой локальной системы есть $\mathbb{R}^2$, обнос вокруг одной окружности - линейное отображение с матрицей, являющейся жордановой клеткой с собственным числом 1, обнос вокруг второй задается диагональной матрицей с собственными числами 1 и -1.

Задача 2. Рассмотрим пространство правильных n-угольников в $\mathbb{R}^3$, имеющих сторону единичной длины и таких, что центр масс принадлежит единичной сфере. Вычислите первое препятствие к построению сечения у расслоения, сопоставляющего n-угольнику его центр масс.

Задача 3. Вычислите классы Штифеля-Уитни нормального расслоения к диагонали в $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$.

Задача 4. Можно ли найти такое конечномерное векторное расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$, что его сумма с тавтологическим была бы изоморфна тривиальному расслоению?

Задача 5. Докажите, что произведение в когомологиях надстройки над любым пространством устроено тривиальным образом.

Задача 6. Вычислите гомологии пересечения двух квадрик общего положения в $\mathbb{C}P^3$.

Задача 7. Найдите все группы, которые могут свободно действовать на четномерной сфере.

Задача 8. Можно ли двумерную сферу реализовать лагранжевым подмногообразием в стандартном симплектическом четырехмерном пространстве?

Задача 9. Рассмотрим расслоение со слоем $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ (связная сумма двух проективных пространств - из двух проективных пространств вырезано по шару и вклеено естественным образом произведение трехмерной сферы на отрезок $S^3 \times [0,1]$, так чтобы получилось ориентируемое многообразие, индуцирующее комплексную ориентацию на дополнении к $S^3 \times [0,1]$).
а) вычислите кольцо целочисленных когомологий $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$;
б) всегда ли конечна группа монодромии локальной системы вторых когомологий слоя?

Задача 10. Вычислите гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ факторпространства пространства $M \times M \times S^N$ по инволюции i, $i(x,y,v) = (y,x,-v)$
а) в случае $M = S^1$, $N = 1$;
б) в случае $M = S^1 \times S^1$, $N = 2$;
в) для произвольного конечномерного клеточного комплекса M и произвольного N.