Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 3.

Задача 1. Морфизмы цепных комплексов $f_0, f_1\colon (C_*, \partial) \to (C'_*, \partial')$ называются *цепногомотопными*, если существует такое линейное отображение $h\colon C_* \to C'_*$ степени 1 (*цепная гомотопия*), что $f_1 - f_0 = \partial' h + h\partial$.

а) Докажите, что цепногомотопные морфизмы цепных комплексов индуцируют одинаковые отображения гомологий.

б) Докажите, что гомотопные клеточные отображения клеточных пространств индуцируют цепногомотопные отображения их цепных комплексов.

в) Докажите, что гомотопически эквивалентные клеточные пространства имеют изоморфные гомологии и изоморфные когомологии.

Задача 2. Вычислить гомологии и когомологии

а) бутылки Клейна K^2;

б) вещественных проективных пространств $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{R}P^\infty$;

в) поверхности в $\mathbb{R}^3$, полученной вращением окружности $\big\{(x-1)^2+y^2=1, z=0\big\}$ вокруг прямой $\big\{x=z=0\big\}$;

г) дополнения в $\mathbb{R}^2$ к множеству из двух точек;

д) дополнения в $\mathbb{R}^3$ к окружности $\big\{x^2+y^2=1, z=0\big\}$;

е) дополнения в $\mathbb{R}^3$ к пространству из п. в);

ж) дополнения в $\mathbb{R}^3$ к объединению окружности $\big\{x^2+y^2=1, z=0\big\}$ и окружности $\big\{(y-1)^2+z^2=1, x=0\big\}$.

Задача 3. Пусть X — клеточное пространство, X' — топологическое пространство, полученное приклеиванием к X шара B^{k+1} при помощи непрерывного отображения $\varphi\colon S^k_+ \to X$, где S^k_+ — замкнутая полусфера сферы $S^k = \partial B^{k+1}$. Введите на X' структуру клеточного пространства, которое получается из X приклеиванием двух клеток, размерности k и $k+1$. Докажите, что вложение $X \hookrightarrow X'$ есть гомотопическая эквивалентность. Такая гомотопическая эквивалентность называется *элементарной*.

Задача 4. Пусть X — клеточное пространство, X' — его стягиваемое клеточное подпространство. Докажите, что отображение факторизации $X \to X/X'$ есть гомотопическая эквивалентность.

Задача 5. Пусть X — непустое линейно связное клеточное пространство, у которого число нульмерных клеток а) конечно; б) счётно. Докажите, что X гомотопически эквивалентно пространству, у которого нульмерная клетка единственна.