

Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 4.

ЗАДАЧА 1. Подпространство A топологического пространства X называется *ре-трактом* X , если существует такое непрерывное отображение $r: X \rightarrow A$, что ограничение r на A тождественно. Пусть (X, A) — клеточная пара и A — ре-тракт X . Используя точную последовательность пары, докажите, что

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A), \quad H^n(X) \cong H^n(A) \oplus H^n(X, A)$$

ЗАДАЧА 2. Пусть Δ — диагональ пространства $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 = X$. Используя точную последовательность пары, вычислите относительные гомологии и когомологии пары (X, Δ) с коэффициентами в $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}$.

ЗАДАЧА 3. Пусть X — клеточное пространство, являющееся объединением своих клеточных подпространств A и B , и пусть $A \cap B$ — тоже клеточное подпространство. Рассмотрим отображения вложения $i: A \cap B \rightarrow A$, $j: A \cap B \rightarrow B$, $k: A \rightarrow X$, $l: B \rightarrow X$. Определите отображение $\partial_*: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B)$ так, что *последовательность Майера–Виеториса*

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

будет точной. Докажите ее точность сведением к точной последовательности пары.

ЗАДАЧА 4. Пусть $f: S^1 \rightarrow S^1$ — непрерывное отображение степени 2. Рассмотрим пространства, полученные из

- 1) $[0, 1] \times S^1 \times \{1, \dots, k\}$; 2) $[0, 1] \times S^1 \times \mathbb{N}$;
- 3) $[0, 1] \times S^1 \times (-\mathbb{N})$; 4) $[0, 1] \times S^1 \times \mathbb{Z}$

склеиванием соседних цилиндров: левая граница цилиндра $[0, 1] \times S^1 \times \{i+1\}$ приклеивается к правой границе цилиндра $[0, 1] \times S^1 \times \{i\}$ при помощи отображения f (точка $(0, x, i+1)$ отождествляется с точкой $(1, f(x), i)$).

- а) Найдите гомологии и когомологии этих пространств.
- б) Какие из них гомотопически эквивалентны?

ЗАДАЧА 5. Пользуясь последовательностью Майера–Виеториса, вычислите гомологии пространств, полученных из двух полноторий $D^2 \times S^1$ склейкой граничных торов $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ при помощи всевозможных аффинных отображений.