Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 6.

<u>Задача 1</u>. Вычислите фундаментальную группу пространства $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$. Нарисуйте его универсальную накрывающую.

<u>Задача 2</u>. Выразите гомологии связной суммы $M_1 \# M_2$ связных замкнутых многообразий M_1 и M_2 через гомологии M_1 и M_2.

<u>Задача 3</u>. а) Опишите гомоморфизмы из фундаментальной группы бутылки Клейна K в $\mathbb{Z}^\bullet$ ($A^\bullet$ обозначает группу обратимых элементов кольца A). Для каждого такого гомоморфизма ψ вычислите гомологии с локальными коэффициентами $H_*(K;\mathbb{Z},\psi)$. Опишите гомоморфизмы из $\pi_1(K)$ в $\mathbb{R}^\bullet$ и вычислите для них гомологии с локальными коэффициентами $H_*(K;\mathbb{R},\psi)$.

б) Проделайте то же самое, взяв вместо K пространство $(S^1 \vee S^2) \times S^1$.

<u>Задача 4</u>. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, $(p,q) = 1$. Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_p$ на пространстве $\mathbb{C}^2$, при котором образующая переводит (z_1, z_2) в $(\zeta z_1, \zeta^q z_2)$, где $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Трёхмерным *линзовым пространством* (*линзой*) $L(p,q)$ называется факторпространство сферы

$$S^3 = \{\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

по этому действию.

а) Докажите, что $L(p,q)$ — гладкое многообразие.

б) Докажите, что всякое замкнутое трёхмерное многообразие, полученное склейкой двух полноторий $D^2 \times S^1$ по аффинному диффеоморфизму их граничных торов, диффеоморфно либо $S^1 \times S^2$, либо линзовому пространству.

в) Рассмотрим следующее разбиение сферы S^3 на множества $e^0_k, e^1_k, e^2_k, e^3_k$, где $0 \leqslant k \leqslant p-1$:

$e^0_k = \{(z_1, 0)\}$, $\arg(z_1) = \frac{2\pi k}{p}$;
$e^1_k = \{(z_1, 0)\}$, $\frac{2\pi k}{p} < \arg(z_1) < \frac{2\pi(k+1)}{p}$;
$e^2_k = \{(z_1, z_2)\}$, $z_2 \neq 0$, $\arg(z_2) = \frac{2\pi k}{p}$;
$e^3_k = \{(z_1, z_2)\}$, $z_2 \neq 0$, $\frac{2\pi k}{p} < \arg(z_2) < \frac{2\pi(k+1)}{p}$.

Докажите, что это клеточное разбиение, инвариантное относительно действия группы $\mathbb{Z}_p$. Используя его, вычислите фундаментальную группу и гомологии многообразия $L(p,q)$.

г) Опишите гомоморфизмы $\psi\colon \pi_1(L(p,q)) \to \mathbb{C}^\bullet$ и вычислите для них гомологии с локальными коэффициентами $H_*(L(p,q);\mathbb{C},\psi)$.

д) Какие ортогональные преобразования пространства $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ индуцируют диффеоморфизмы между $L(p,q)$ и $L(p,q')$ для $q' \neq q$?

е) Какие из линз $L(p,q)$ гомотопически эквивалентны друг другу?