

Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 8.

ЗАДАЧА 1. Опишите гомотопические классы непрерывных отображений из  $\mathbb{R}P^2$  в  $\mathbb{R}P^2$  и из  $\mathbb{R}P^2$  в  $\mathbb{R}P^3$ .

ЗАДАЧА 2. Вычислите кольцо когомологий с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  пространства, полученного из  $\mathbb{R}P^\infty$  стягиванием в точку подпространства  $\mathbb{R}P^n$ .

ЗАДАЧА 3. Пусть  $\xi$  —  $n$ -мерное векторное расслоение над  $k$ -мерным клеточным пространством. Докажите, что при  $n > k$  у  $\xi$  найдётся по крайней мере  $n - k$  сечений, линейно независимых в каждой точке.

ЗАДАЧА 4. а) Пусть  $X$  — конечномерное клеточное пространство. Докажите, что для всякого вещественного векторного расслоения  $\xi$  над  $X$  найдётся такое вещественное векторное расслоение  $\zeta$  над  $X$ , что  $\xi \oplus \zeta$  тривиально.

б) Докажите, что для бесконечномерных  $X$  это, вообще говоря, неверно.

ЗАДАЧА 5. а) Для каких пар классов  $a_1 \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ ,  $a_2 \in H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$  найдётся такое двумерное вещественное векторное расслоение  $\xi$  над  $\mathbb{R}P^2$ , что  $w_1(\xi) = a_1$ ,  $w_2(\xi) = a_2$ ? Постройте явные примеры.

б) Докажите, что вещественные векторные расслоения данной размерности над  $\mathbb{R}P^2$  однозначно (с точностью до изоморфизма) определяются своими классами  $w_1$  и  $w_2$ .

в) Докажите утверждение предыдущего пункта для векторных расслоений размерности  $\geq 3$  над произвольным двумерным клеточным пространством.

ЗАДАЧА 6. Пусть  $X$  — четырёхмерное клеточное пространство. Докажите, что для всякой пары классов  $b_1 \in H^2(X)$ ,  $b_2 \in H^4(X)$  найдётся ровно одно (с точностью до изоморфизма) двумерное комплексное векторное расслоение  $\xi$  над  $X$ , удовлетворяющее условиям  $c_1(\xi) = b_1$ ,  $c_2(\xi) = b_2$ .