Комплексный анализ — Семинар №1 — 13 февраля 2015

1. Какие линии и множества на комплексной плоскости задаются следующими соотношениями:

$$\operatorname{Re}\frac{z-a}{z+a}=0,\quad a>0;\qquad \big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2a,\quad z_1,z_2\in\mathbb{C},\ a>0$$

$$0<\arg\frac{i-z}{z+i}<\frac{\pi}{2};\qquad \operatorname{Re}(z(1-i))<\sqrt{2};\qquad \operatorname{Re}z^4>\operatorname{Im}z^4.$$

2. Доказать, что если $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ и $z_1+z_2+z_3=0$, что точки z_1,z_2,z_3 делят окружность $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$ на три равные дуги.

3. Найдите ошибку в рассуждении:

$$z^2=(-z)^2\Rightarrow \operatorname{Arg}(z^2)=\operatorname{Arg}\big((-z)^2\big)\Rightarrow 2\operatorname{Arg}z=2\operatorname{Arg}(-z)\Rightarrow \operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}(-z)\Rightarrow \operatorname{Arg}i=\operatorname{Arg}(-i)$$

(последнее утверждение в этой цепочке, очевидно, неверно).

4. Пусть ω_n — главный корень степени n из единицы, и пусть m — натуральное число. Вычислить

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_n^{mk}.$$

Доказать, что множество неравных 1 значений корня $\sqrt[n]{1}$ задается уравнением $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1=0$.

5. Докажите, что последовательность $\{e^{in}\colon n=1,2,\ldots\}$ расходится. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}e^{2\pi e n! i}=1.$$

6. Пусть

$$z_n:=\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{i}{k}\Big),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Докажите, что множество предельных точек последовательности $\{z_n\}$ образует окружность.

7. Доказать, что множество всех корней производной $P'(z)$ произвольного многочлена $P(z)=a_0\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ лежат в выпуклой оболочке точек z_k, $k=1,\ldots,n$ (корней многочлена P).

8. Проверить, какие из следующих путей эквивалентны друг другу:

$$e^{2\pi it},t\in[0,1];\quad e^{4\pi it},t\in[0,1];\quad e^{2\pi it^2},t\in[0,1];\quad e^{-2\pi it},t\in[-1,0];\quad e^{4\pi i\sin t},t\in\Big[0,\frac{\pi}{6}\Big].$$

9. Пусть $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ — путь. Доказать, что (многозначная) функция $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$ распадается над всем отрезком $[0,1]$ на счетное множество непрерывных ветвей φ_j, $j\in\mathbb{Z}$, причем любые из этих двух ветвей отличаются друг от друга на аддитивную постоянную, кратную 2π.

Обозначим $\Delta_\gamma\operatorname{Arg}z:=\varphi_j(1)-\varphi_j(0)$.

10. Доказать, что функция $\Delta_{(\gamma-a)}\operatorname{Arg}z$ непрерывна по a вне множества $[\gamma]:=\{\gamma(t)\colon t\in[0,1]\}$ (носителя пути γ).

Пусть $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ — путь, а $a\notin[\gamma]$. Обозначим

$$\operatorname{ind}_a\gamma:=\frac{1}{2\pi}\Delta_{(\gamma-a)}\operatorname{Arg}z$$

— индекс пути γ относительно точки a.

11. Пусть γ — замкнутый путь. Доказать, что функция $\psi(a)=\operatorname{ind}_a\gamma$ постоянна в каждой связной компоненте множества $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ и принимает только целочисленные значения.

12. Доказать, что $\Delta_\gamma\operatorname{Arg}z$ (и, соответственно, $\operatorname{ind}_a\gamma$) не меняется при замене пути γ на любой эквивалентный ему путь.

13. Найти в каких точках комплексной плоскости (комплексно) дифференцируемы и в каких голоморфны следующие функции и вычислить их производные:

$$e^{\cosh z},\quad \frac{e^z+1}{e^z-1},\quad \frac{\cos z}{\cos z-\sin z},\quad |z|^2,\quad z\operatorname{Re}z.$$

14. Вывести условия Коши–Римана в полярных координатах, то есть для функции, заданной в виде $R(r,\varphi)e^{i\Phi(r,\varphi)}$, где (r,φ) — полярные координаты в прообразе, а (R,Φ) — в образе.

15. Пусть f — функция, голоморфная в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$. Доказать, что если одна из следующих функций:
$$\operatorname{Re} f, \quad \operatorname{Im} f, \quad |f|, \quad \arg f$$
постоянна в G, то и f постоянна в G.

16. Пусть $f \in Hol(G)$, а $A, B, C \in \mathbb{R}$ таковы, что $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Доказать, что если $A \operatorname{Re} f + B \operatorname{Im} f + C \equiv 0$ в G, то f постоянна в G.

17. Найти $\partial F/\partial z$ и $\partial F/\partial \overline{z}$, если
$$F(z) = |z|, \quad F(z) = |z-a|^p, \quad F(z) = \sqrt{|z-a|^2 + |z-b|^2}, \quad F(z) = \frac{|z-a| + i|z+a|}{|z-a| - i|z+a|}.$$

18. Пусть f — голоморфная функция. Выразить через f и f' следующие функции:
$$\frac{\partial}{\partial z}\big(|f(z)|\big), \quad \frac{\partial}{\partial z}\big(\operatorname{Re} f(z)\big), \quad \frac{\partial}{\partial z}\big(\operatorname{Im} f(z)\big).$$

19. Пусть функция f комплексно дифференцируема в точке a и пусть $f'(a) = b$. Доказать, что функция $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ является комплексно дифференцируемой в точке $\overline{a}$ и $g'(\overline{a}) = \overline{b}$.

20. Пусть функция f определена в окрестности точки z_0, комплексно дифференцируема в z_0 и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что множество значений f не может лежать по одну сторону относительно какой-то прямой, проходящей через точку $f(z_0)$.

21. Пусть функция f вещественно дифференцируема в точке z_0. Доказать, что множество предельных значений выражения
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
при $z \to z_0$ образует окружность с центром в точке $f'_z(z_0)$ и радиусом $|f'_{\overline{z}}(z_0)|$.

22. Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемы в точке z_0, а функция $f = u + iv$ — комплексно дифференцируема в этой точке, причем $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что линии уровня $\{z\colon u(z) = u(z_0)\}$ и $\{z\colon v(z) = z(z_0)\}$ пересекаются в точке z_0 под прямым углом.

23. Найти голоморфную всюду в $\mathbb{C}$ функцию f, если известно, что
$$\operatorname{Re} f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0; \qquad \operatorname{Re} f = e^x(x\cos x - y \sin y), \quad f(0) = 0;$$
$$\operatorname{Im} f = y\cos y \cosh x + x \sin y \sinh x, \quad f(0) = 0; \qquad |f| = (x^2 + y^2)e^x; \qquad \arg f = xy.$$
Проверить корректность постановки задачи!

24. Пусть функция f голоморфна в замыкании $\overline{G}$ некоторой области $G \subset \mathbb{C}$ и пусть f взаимно однозначна в G. Доказать, что
$$\varLambda(f(G)) = \iint_G |f'(z)|^2 d\varLambda(z),$$
где $\varLambda(z)$ — плоская мера Лебега.

25. Пусть $f \in Hol(G)$, где G — область в $\mathbb{C}$, и пусть $\varGamma$ — спрямляемая кривая, лежащая в области G. Доказать, что
$$\ell(f(\varGamma)) = \int_\varGamma |f'(z)||dz|,$$
где под $|dz|$ понимается диференциал длины дуги кривой $d\ell$.