Комплексный анализ — Семинар №3 — 27 февраля 2015

1. Вычислить $\int_\gamma (x^2+iy^2)dz$, где $\gamma(t)=t^2+it$, $t\in[0,1]$.

2. Пусть $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $\lambda\in\mathrm{Ln}(z)$. Построить путь $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ с началом в точке 1 и концом в точке z (то есть $\gamma(0)=1$, $\gamma(1)=z$) такой, что $\int_\gamma \frac{1}{z}dz=\lambda$.

3. Пусть f — вещественно дифференцируемая в окрестности 0 функция. Доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|z|=\varepsilon} f(z)dz = 2\pi i f'_{\overline{z}}(0).$$

4. Найти первообразные для следующих функций: а)$z^2\operatorname{ch} az$, б)$e^{az}\cos bz$.

5. Напомним, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. Вычислить

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax dx$, где $a\in\mathbb{R}$; б) $\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$ и $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$.

6. Пусть $D=D(0,R)$, $f\in Hol(D)\cap C(\overline{D})$. Вычислить $\iint_{r\leqslant|z|\leqslant R} f(z)dxdy$.

7. Пусть $D=D(0,R)$, $f\in Hol(D)\cap C(\overline{D})$ и $M=\max_{|z|=R}|f(z)|$. Доказать, что при $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $|z|<R$ справедливы неравенства:

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|\leqslant\frac{MR}{(R-|z|)^{n+1}},\qquad |f'(z)|\leqslant\frac{MR}{R^2-|z|^2}.$$

8. Пусть f — целая функция ($f\in Hol(\mathbb{C})$) и для всех $z\in\mathbb{C}$ выполнена оценка $|f(z)|\leqslant C(1+|z|)^p$, где C и $p>0$ — фиксированные константы. Доказать, что f — полином степени не выше p.

9*. Пусть функция u голоморфна в некоторой области G, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|$ сходится. Доказать, что произведение $\prod_1^\infty(1+c_ku(z))$ сходится в G к *голоморфной* функции.

10. Пусть $P(z)=z^n+\ldots$ — полином степени n с единичным старшим коэффициентом. Доказать, что если $\max_{|z|=1}|P(z)|\leqslant 1$, то $P(z)=z^n$.

11. Пусть G — некоторая область в $\mathbb{C}$, а $f_1,\ldots,f_m\in Hol(G)$. Положим

$$M:=\limsup_{z\to\partial G}(|f(z_1)|+\cdots+|f(z_m)|).$$

Показать, что если хотя бы одна функция f_k — не тождественная константа, то для любой точки $z\in G$ выполнено $|f_1(z)|+\cdots+|f_m(z)|<M$.

12. Пусть $\gamma(t)\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ — замкнутая жорданова кривая (точнее, некоторая ее параметризация), внутренность которой содержит точку 0. Пусть $z_0=\gamma(0)=\gamma(1)$. Рассмотрим какую-нибудь непрерывную ветвь $L(z)$ функции $\mathrm{Ln}\,z$ вдоль γ. Вычислить $\int_\gamma f'(z)L(z)dz$.

13. Вычислив и оценив интеграл $\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$ при $|a|<R$ и $|b|<R$ доказать теорему Лиувилля: ограниченная и голоморфная функция в $\mathbb{C}$ является константой.

14. Пусть $f\in Hol(G)$ и $a_1,\ldots,a_n\in G$. Положим $\omega(z)=(z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_n)$ и определим

$$P(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\omega(\xi)}\frac{\omega(\xi)-\omega(z)}{\xi-z}d\xi.$$

Доказать, что $P(z)$ — полином степени $n-1$ и $P(a_j)=f(a_j)$.