

ERRATA

Комплексный анализ — Семинар №5 — 13 марта 2015

Исправления и изменения выделены красным цветом.

6. Пусть функции $f, g \in \text{Hol}(D(a, \varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ и пусть точка a является нулем порядка m , $m \in \mathbb{N}$, для функции f и нулем порядка $m + 1$ для функции g . Показать, что

$$\text{res}_a \frac{f}{g} = \frac{(m+1)f^{(m)}(a)}{g^{(m+1)}(a)}.$$

Получить аналогичные формулы для вычисления $\text{res}_a (f/g^2)$ в случае $m = 0$, и для вычисления $\text{res}_a (f/h)$, где $h \in \text{Hol}(D(a, \varepsilon))$ и h имеет в точке a ноль порядка $m + 2$.

7. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ такие многочлены комплексного переменного, что $\deg P < \deg Q$, пусть $R(z) = P(z)/Q(z)$, и пусть $\{z_1, \dots, z_n\}$ — множество нулей многочлена Q (без учета кратности). Доказать, что справедлива формула

$$R(z) = \sum_{j=1}^n \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{R(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Показать, что эта формула представляет собой разложение R в сумму простейших дробей. Пусть P и Q — два взаимно простых многочлена степени m и k соответственно, $m, k \in \mathbb{N}$; найти (используя указанную формулу) многочлены P_1 и Q_1 степеней не выше $k - 1$ и $m - 1$ соответственно такие, что $P(z)P_1(z) + Q(z)Q_1(z) \equiv 1$.