## Комплексный анализ — Семинар №5 — 13 марта 2015

**1.** Найти все изолированные особые точки однозначного характера следующих функций и указать их тип. Чем является $\infty$ для этих функций:

$$\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}; \quad z^2 \sin\frac{z}{z+1}; \quad e^{\operatorname{ctg}(\pi/z)}; \quad \sin\left(e^{1/z}\right); \quad z\operatorname{tg}^2 z.$$

**2.** Пусть $a$ — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f$. Доказать, что если $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z-a|=\varepsilon}|f(z)||dz| = 0$, то $a$ — устранимая особая точка для $f$. Доказать, что если в некоторой окрестности точки $a$ справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant A|z-a|^{-m}$ при $A, m \geqslant 0$, то $a$ не может быть существенной особой точкой функции $f$.

**3.** Пусть $a$ — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f$. Доказать, что если $\operatorname{Re} f(z) > 0$ в некоторой окрестности точки $a$, то $a$ — устранимая особая точка функции $f$. Доказать, что если $a$ — это существенно особая точка функции $f$, то в сколь угодно малой окрестности точки $a$ функция $\operatorname{Re} f$ принимает все вещественные значения.

**4.** Разложить функцию в ряд Лорана во всех подходящих кольцах с центром в точке $a$:

$$\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)},\ a = i; \quad \frac{z^3}{(z+1)(z-2)},\ a = 1; \quad \frac{e^z}{z(1-z)},\ a = 0.$$

**5.** а) Пусть $f_1$ — голоморфная ветвь функции $\sqrt[3]{z/(z-1)}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезами по отрезкам $[0, 2i]$ и $[1, 2i]$ такая, что $f_1(1/2) = e^{i\pi/3}$. Разложить функцию $f_1$ в ряд Лорана в области $|z| > 2$ с центром $a = 0$. б) Пусть $f_2$ — голоморфная ветвь функции $\ln\bigl((z+1)/(z-2)\bigr)$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по дуге $\left\{z\colon \left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2},\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\right\}$ такая, что $f(1/2) = 3\pi i$. Разложить функцию $f_2$ в ряд Лорана в области $|z| > 2$ с центром $a = 0$.

**6.** Пусть функции $f, g \in \mathit{Hol}(D(a,\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$ и пусть точка $a$ является нулем порядка $m$, $m \in \mathbb{N}$, для функции $f$ и нулем порядка $m+1$ для функции $g$. Показать, что

$$\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{(m+1)f^{(m)}(a)}{g^{(m+1)}(a)}.$$

Получить аналогичные формулы для $\operatorname{res}_a\left(f/g^2\right)$ и для $\operatorname{res}_a\bigl(f/h\bigr)$, где $h \in \mathit{Hol}(D(a,\varepsilon))$ и $h$ имеет в точке $a$ ноль порядка $m+2$.

**7.** Доказать, что для любой рациональной функции $R$ с полюсами $z_1, \dots, z_n$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива формула

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{\zeta=z_j} \frac{R(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Использую эту формулу вывести интерполяционную формулу Лагранжа для многочленов. Пусть $P$ и $Q$ — два взаимно простых многочлена степени $m$ и $k$ соответственно, $m, k \in \mathbb{N}$; найти (использую указанную формулу) многочлены $P_1$ и $Q_1$ степеней не выше $k-1$ и $m-1$ соответственно такие, что $P(z)P_1(z) + Q(z)Q_1(z) \equiv 1$.

**8.** Используя теорему Коши о вычетах вычислить интегралы:

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2 \sin^2\left(1/z\right)}{(z-1)(z-2)}dz; \quad \int_{|z|=4} \frac{z^3 dz}{e^{z^2}-1}; \quad \int_{|z-2|=5/2} \frac{z+2}{2\pi i - \ln(1+z)}dz,$$

для всех ветвей соответствующего логарифма.

**9.** Используя теорему Коши о вычетах вычислить интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+2ix-2}; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{13+12\sin\theta}; \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}dx}{(x+1)^3}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

**10.** Используя теорему Коши для интегралов в смысле главного значения вычислить:

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{iax}}{x^2}dx; \quad \text{v. p.}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{b+\sin\theta}; \quad \text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2(x^2-4)}dx,$$

где $a > 0$ (второй случай $a < 0$), $b \in (-1, 1)$. Во всех случаях обосновать существование соответствующего интеграла в смысле главного значения.