Комплексный анализ — Семинар №10 — 24 апреля 2015

1. Пусть $a_1 \neq a_2$ и $b_1 \neq b_2$ лежат в $\mathbb{D}$. При каких a_1, a_2, b_1 и b_2 области $\mathbb{D} \setminus \{a_1, a_2\}$ и $\mathbb{D} \setminus \{b_1, b_2\}$ конформно эквивалентны.

2. а) Доказать, что если $k \in (0, 1)$, то функция

$$F_k(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

(интеграл берется по отрезку $[0, z]$) конформно отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+$ на некоторый прямоугольник Q (найти какой). При этом выбирается такая ветвь корня в $\mathbb{C}_+$, которая на отрезке $[0, 1]$ вещественной оси принимает положительные предельные значения со стороны области $\mathbb{C}_+$. Функция F_k называется эллиптическим интегралом первого рода.

б) Показать, что обратное отображение $F_k^{-1} \colon Q \to \mathbb{C}_+$ продолжается до мероморфной функции в $\mathbb{C}$, имеющей вещественный и мнимый периоды. Доказать, что совокупность всех периодов этой функции (включая 0) образует подгруппу в $\mathbb{C}$, изоморфную $\mathbb{Z}^2$.

3. а) Найти все целые функции f и g такие, что $e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1$.

б) При $n \geqslant 3$ найти все целые функции f, g, h такие, что $f(z)^n + g(z)^n \equiv h(z)^n$.

в) При $n \geqslant 3$ найти все целые функции f, g такие, что $f(z)^n + g(z)^n \equiv e^z$.

г) Доказать, что функция ze^z не имеет исключительных пикаровских значений.

4. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ и пусть $|f(z)| = 1$ всюду на $\mathbb{T}$. Доказать, что функция f рациональна.

5. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{C}_+) \cap C(\overline{\mathbb{C}}_+ \cap \mathbb{C})$ и пусть $f(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$, а $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Доказать, что f — линейная функция.

6*. Пусть K — график непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции с ограниченной вариацией. Доказать, что K является устранимым множеством в классе голоморфных непрерывных функций. Другими словами доказать, что если G — область в $\mathbb{C}$ такая, что $K \subset G$, то всякая функция $f \in \mathit{Hol}(G \setminus K) \cap C(G)$ будет голоморфная в G.

7*. Доказать существование и единственность функции Альфорса для любого компакта в $\mathbb{C}$.

8*. а) Чему равна функция Альфорса для континуума. б) Доказать, что γ-емкость континуума сравнима с его диаметром.

9. Доказать, что риманова поверхность ПАФ $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, (дополненная точками 0 и ∞) гомеоморфна двумерной сфере.