ЛИСТОК 8–9. РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ.

Задача 1. Найдите элемент, порождающий данное конечное расширение. Вычислите степень расширения. Является ли расширение нормальным? Сепарабельным? Найдите все подрасширения и решите для них те же задачи. Вычислите группу автоморфизмов расширения и всех подрасширений. а) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}$. б) $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}] : \mathbb{Q}$, в) $\mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_4] : \mathbb{Q}$, где $z_1 \ldots, z_4$ — комплексные корни степени 5 из единицы, г) $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3] : \mathbb{Q}$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + x + 1 = 0$, д) $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3] : \mathbb{Q}$, где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 6x + 2 = 0$, е) $\mathbb{C}(x)[y] : \mathbb{C}(x)$, где y — корень уравнения $y^2 - x^3 + x = 0$, ж) $\mathbb{F}_{p^n}(x)[y] : \mathbb{F}_{p^n}(x)$, где y — корень уравнения $y^p - x = 0$, з) $\mathbb{F}_p(x, y)[z, t] : \mathbb{F}_p(x, y)$, где z, t — корни уравнений $z^p - x = 0$ и $t^p - y = 0$.

Группой Галуа многочлена $f \in k[t]$ называется группа автоморфизмов расширения $k \subset \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ — поле разложения многочлена f.

Задача 2. Опишите все подрасширения поля $\mathbb{F}$ разложения многочлена $t^3 + pt + q \in \mathbb{C}(p, q)[t]$. Докажите, что существует подполе K, $\mathbb{C}(p, q) \subset K \subset \mathbb{F}$ такое, что $K = \mathbb{C}(p, q)[D]$, $\mathbb{F} = K[x]$, где минимальные многочлены элементов D и x имеют вид $t^2 - a$ и $t^3 - b$ соответственно. Выведите отсюда формулу для корней кубического уравнения.

Задача 3. Вычислите группу Галуа многочлена а) $t^3 + pt + q \in \mathbb{Q}[t]$, б) $t^n - 1 \in \mathbb{Q}[t]$ при $n \leq 5$, в) $t^5 + t + x \in \mathbb{C}(x)[t]$.

Задача 4. а) Пусть G — абелева группа, $a, b \in G$ — элементы конечных порядков m и k, причем НОД$(m, k) = 1$. Докажите, что элемент ab имеет порядок mk. б) Докажите, что множество корней уравнения $t^n - 1 = 0$ в произвольном поле $\mathbb{F}$ образует конечную абелеву группу $R_n(\mathbb{F})$. в) Пусть $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$, и $|R_n(\mathbb{F})| = n$ (т.е. многочлен $t^n - 1$ разлагается в $\mathbb{F}$ на линейные множители). Докажите, что в $R_n(\mathbb{F})$ есть элемент порядка n/p_i для каждого i. г) Докажите, что группа $R_n(\mathbb{F})$ циклическая.

Задача 5. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка q и характеристики p. а) Докажите, что $q = p^n$ для некоторого n. б) Докажите, что $\mathbb{F}_q$ — поле разложения многочлена $t^q - t$ над полем $\mathbb{F}_p$ и, тем самым, единственно. в) Сформулируйте и докажите теорему о примитивном элементе для конечного поля.