ЛИСТОК 5. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ.

Задача 1 (многочлены Лежандра)**.** Пусть A_n — векторное пространство многочленов степени не выше n с билинейной формой $(P,Q)=\int_{-1}^{n}P(t)Q(t)\,dt$, а $P_0,\dots,P_n$ — базис в A_n, полученный ортогонализацией базиса $1,t,\dots,t^n$. а) Вычислите P_0 и P_1 и докажите, что $nP_n(t)=(2n-1)tP_{n-1}(t)-(n-1)P_{n-2}(t)$ при $n\geq 2$. б) Докажите, что $P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\bigl((t^2-1)^n\bigr)$. в) Докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)s^n=\frac{1}{\sqrt{1-2ts+s^2}}$.

Задача 2 (многочлены Чебышева)**.** Пусть A_n — векторное пространство многочленов степени не выше n с билинейной формой $(P,Q)=\int_{-1}^{n}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, а $T_0,\dots,T_n$ — базис в A_n, полученный ортогонализацией базиса $1,t,\dots,t^n$. а) Вычислите T_0 и T_1 и докажите, что $T_n(t)=2tT_{n-1}(t)-T_{n-2}(t)$ при $n\geq 2$. б) Докажите, что $T_n(\cos\varphi)=\cos n\varphi$. в) Докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)s^n=\frac{1-ts}{1-2ts+s^2}$.

Задача 3 (многочлены Эрмита)**.** Пусть A_n — векторное пространство многочленов степени не выше n с билинейной формой $(P,Q)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,dt$, а $H_0,\dots,H_n$ — базис в A_n, полученный ортогонализацией базиса $1,t,\dots,t^n$. а) Вычислите H_0 и H_1 и докажите, что $H_n(t)=tH_{n-1}(t)-(n-1)H_{n-2}(t)$ при $n\geq 2$. б) Докажите, что $\exp(ts-\frac{s^2}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(t)\frac{s^n}{n!}$. в) Пусть $u\in A_n$ — решение дифференциального уравнения $u''-tu'=\lambda u$, где λ — вещественная константа. Докажите, что $u=H_k(t)$ при $k=0,\dots,n$, и вычислите λ.

Задача 4. Докажите, что если квадратичная форма Q в n-мерном векторном пространстве V над $\mathbb{R}$ приводится к виду $x_1^2+\dots+x_\ell^2-x_{\ell+1}^2-\dots-x_{\ell+m}^2$, то ℓ — наибольшая размерность подпространства $V_+\subset V$, ограничение формы Q на которое положительно определено, а m — наибольшая размерность подпространства $V_-\subset V$, ограничение формы Q на которое отрицательно определено. Выведите из этого, что числа ℓ и m не зависят от выбора базиса, в котором форма Q является суммой квадратов.

Задача 5 (задача для исследования)**.** Пусть Q_c — семейство билинейных форм на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$, полиномиально зависящих от параметра $c\in\mathbb{C}$ (т.е. для любых двух векторов $v_1,v_2\in V$ выражение $Q_c(v_1,v_2)$ является многочленом от c). Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис, для которого при $0<|c|<\varepsilon$ (при некотором $\varepsilon>0$) ограничение формы Q_c на подпространство $L_k\stackrel{\text{def}}{=}\langle e_1,\dots,e_k\rangle$ при любом $k=1,\dots,n$ невырождено. Для формы Q_0 невырожденность не предполагается; в том числе она может иметь ядро на всем $L_n=V$ (может даже быть нулевой). Пусть $f_1(c),\dots,f_n(c)$ — базис, полученный из $e_1,\dots,e_n$ ортогонализацией относительно формы Q_c, $0<|c|<\varepsilon$. а) Верно ли, что предел $f_k(0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{c\to 0}f_k(c)$ обязательно существует? б) Верно ли, что векторы $f_1(0),\dots,f_n(0)$ составляют базис в V? в) Верно ли, что векторы $f_k(0)$, принадлежащие ядру формы Q_0, составляют в этом ядре базис?