ЛИСТОК 6. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

Кольцом Витта–Гротендика называется группа Гротендика моноида, элементы которого — классы изоморфизма векторных пространств с невырожденными квадратичными формами на них. Тензорное умножение превращает группу в кольцо.

Задача 1. а) На пространстве V_1 задана билинейная форма B_1, на пространстве V_2 — форма B_2 (все пространства и формы — над полем $\mathbb{F}$. Дайте определение билинейной формы $B_1 \otimes B_2$ на пространстве $V_1 \otimes V_2$. Докажите, что если B_1 и B_2 симметричны, то и $B_1 \otimes B_2$ симметрична; если B_1 и B_2 невырождены, то и $B_1 \otimes B_2$ невырождена. б) Докажите, что построенное умножение пространств с формой корректно продолжается на группу Гротендика. в) Назовем пространство (V, B) гиперболическим, если $(V, B) = (V_0, B_0) \oplus \cdots \oplus (V_0, B_0)$, где $V_0 = \mathbb{F}^2$, а B_0 задается матрицей $\operatorname{diag}(1, -1)$. Докажите, что гиперболические пространства образуют идеал в кольце Витта–Гротендика. Фактор по этому идеалу называется группой Витта поля $\mathbb{F}$.

Задача 2. Опишите кольцо Витта–Гротендика и группу Витта полей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

Задача 3. а) Классифицируйте квадратичные формы в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}_3$. б) Опишите кольцо Витта–Гротендика поля $\mathbb{F}_3$. в) Вычислите группу Витта поля $\mathbb{F}_3$.

Задача 4. Докажите, что на квадратичной гиперповерхности $Q(x) = 1$ (где Q — невырожденная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$) имеется не меньше $2n$ точек, где касательная гиперплоскость перпендикулярна радиус-вектору.

Задача 5. Пусть V_n — пространство многочленов от функций $\cos t$, $\sin t$ степени не выше n. Билинейная форма B задана формулой $B(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g'(t)\,dt$. Докажите, что форма кососимметрическая и приведите ее к стандартному виду.