

Листок 3. Топологические и метрические пространства

Множество X с заданной на нем функцией $\varrho: X \times X \mapsto [0, +\infty)$ называется метрическим пространством, если выполняются условия: 1) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y$, 2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ и 3) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Задача 1. Докажите, что следующие пары (X, ϱ) являются метрическими пространствами:

- (a) X – произвольное непустое множество, $\varrho(x, y) = 1$ при $x \neq y$;
- (b) $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |x - y|$;
- (c) $X = \mathbb{Q}$, $\varrho(x, y) = \|x - y\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ – p -адическая норма;
- (d) $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x, y) = |f(x) - f(y)|$, где f – возрастающая функция;
- (e) $X = \mathbb{R}^n$, $\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;
- (f) $X = \{0, 1\}^n$, $\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
- (g) $X = \{0, 1\}^\infty$, $\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} |x_i - y_i|$;
- (h) $X = l_p = \{(x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty\}$, $\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;
- (i) $X = C[a, b]$, $\varrho(f, g) = \left(\int_a^b |f - g|^p dx\right)^{1/p}$, $p > 1$;
- (j) $X = B(Y)$ – множество ограниченных функций на множестве Y , $\varrho(f, g) = \sup_Y |f - g|$.

Задача 2. (a) Пусть $\varrho(A, B) = \lambda(A \Delta B)$, где $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, и X – все измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0, 1]$. Является ли (X, ϱ) метрическим пространством? Если нет, то что надо исправить?

(b) Пусть $X = \mathcal{L}[a, b]$ и $\varrho(f, g) = \int_a^b |f - g| dx$. Является ли (X, ϱ) метрическим пространством? Если нет, то что надо исправить?

Задача 3. Пусть (X, ϱ) – метрическое пространство. Докажите, что $\sigma(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{1 + \varrho(x, y)}$ является метрикой.

Открытым шаром $B(a, r)$ в (X, ϱ) называют множество $\{x : \varrho(a, x) < r\}$.

Задача 4. Нарисуйте шар $B(0, 1)$ в пунктах (b), (c), (d), (e) предыдущей задачи.

Задача 5. Приведите пример метрического пространства и двух шаров разного радиуса, из которых шар большего радиуса содержится строго внутри шара меньшего радиуса.

Задача 6. Пусть $X = \{0, 1\}^n$. Найдите число элементов в шаре радиуса k .

Задача 7. Докажите, что при $n = 2^m - 1$ булев куб $X = \{0, 1\}^n$ можно представить в виде объединения непересекающихся шаров единичного радиуса, а при других значениях n этого сделать нельзя.

Задача 8. (код Хэмминга) Используя предыдущую задачу укажите способ передачи последовательности из 0 и 1, при котором по полученной последовательности можно было исправить ровно одну ошибку, т. е. узнать в каком бите произошла эта ошибка. Оцените количество добавленных символов.

Множество U в (X, ϱ) называется открытым, если для всякой точки $a \in U$ найдется шар $B(a, r) \subset U$. Множество F замкнуто, если его дополнение открыто. Замкнутым шаром $\overline{B}(a, r)$ называют множество $\{x : \varrho(a, x) \leq r\}$. Определение внутренних, граничных и предельных точек в метрическом пространстве не отличается от соответствующих определений на числовой прямой.

Задача 9. Докажите, что открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар является замкнутым множеством.

Задача 10. Докажите, что любое объединение и конечное пересечение открытых множеств является открытым; любое пересечение и конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Замыканием множества E в (X, ϱ) называется множество $\overline{E} = \bigcap_{E \subset F} F$ – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E .

Задача 11. Докажите, что $\overline{E} = E \cup \{\text{граничные точки}\} = E \cup \{\text{предельные точки}\}$. Покажите, что F – замкнуто тогда и только тогда, когда $F = \overline{F}$.

Задача 12. Верно ли, что $\overline{B}(a, r) = \overline{\overline{B}(a, r)}$?

Множество $A \subset B$ всюду плотно в множестве B , если $B \subset \overline{A}$. Если в метрическом пространстве X есть не более чем счетное всюду плотное подмножество, то X называется сепарабельным метрическим пространством.

Задача 13. Какие пространства из задачи 1 являются сепарабельными?

Последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства (X, ϱ) сходится к x , если $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Упр 1. Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве из пункта (a) первой задачи.

Упр 2. Докажите, что предел последовательности определен единственным образом и предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши или является фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n, m > N$. Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел.

Упр 3. Докажите, что замкнутое подмножество полного пространства является полным пространством.

Задача 14. Какие из пространств задачи 1 являются полными?

Биективное отображение $f: (X, \varrho_X) \mapsto (Y, \varrho_Y)$ называется изометрией двух метрических пространств X и Y , если $\varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \varrho_X(x_1, x_2)$.

Задача 15. Всякое ли метрическое пространство из трех элементов можно изометрично вложить в \mathbb{R}^n ?

Задача 16. Используя отображение $x \mapsto f(y) = \varrho(y, x) - \varrho(y, x_0)$, докажите, что всякое метрическое пространство X изометрично подпространству в $B(X)$. Докажите, что для всякого метрического пространства X существует единственное с точностью до изометрии пополнение: такое полное пространство Y , что X изометрично некоторому множеству $X' \subset Y$ и $\overline{X'} = Y$.

Задача 17. Докажите, что в полном пространстве всякая последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку. Покажите на примере, что отказаться от стремления к нулю радиусов нельзя.

Задача 18. Докажите теорему Бэра: если полное метрическое пространство является объединением не более чем счетного набора замкнутых множеств, то хотя бы одно из этих множеств содержит открытый шар положительного радиуса.

Задача 19. Две метрики ϱ и σ на X называются эквивалентными, если $\varrho(x_n, x) \rightarrow 0 \iff \sigma(x_n, x) \rightarrow 0$ для всякой последовательности x_n .

(а) Приведите пример двух неэквивалентных метрик.

(б) Приведите пример двух эквивалентных метрик ϱ и σ , для которых не существует функции f на $[0, +\infty)$ такой, что $f(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ и $\varrho(x, y) \leq f(\sigma(x, y))$ для всех $x, y \in X$.

(с) Пусть на X заданы две эквивалентные метрики ϱ и σ . Предположим, что из всякой последовательности элементов $x_n \in X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Докажите, что существуют функции f, g на $[0, +\infty)$ такие, что $f(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, $g(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ и выполняются неравенства $\varrho(x, y) \leq f(\sigma(x, y))$ и $\sigma(x, y) \leq g(\varrho(x, y))$ для всех $x, y \in X$.

Множество X с выделенной системой подмножеств τ называется топологическим пространством, если 1) $\emptyset, X \in \tau$, 2) пересечение всяких двух множеств из τ входит в τ , 3) объединение всякого набора множеств из τ входит в τ . Множества из τ называются открытыми, а само семейство τ называется топологией. База топологии – такая система открытых множеств, что их объединения дают все открытые множества.

Типичным примером топологического пространства является метрическое пространство.

Задача 20. Докажите, что топология сепарабельного метрического пространства имеет счетную базу.

Последовательность x_n элементов топологического пространства сходится к элементу x , если для всякого открытого множества U , содержащего x , найдется номер N такой, что $x_n \in U$ для всех $n > N$.

Задача 21. Приведите пример топологического пространства и последовательности его элементов, имеющей более одного предела.

Задача 22. Пусть \mathbb{R}^T – пространство функций $f: T \mapsto \mathbb{R}$, где T – непустое множество. Топология задана базой множеств вида

$$U_{f, t_1, \dots, t_n, \varepsilon} = \{g \in \mathbb{R}^T : |g(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Докажите, что

(а) f_n сходится к f в данной топологии тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \forall t \in T$;

(б) если T – не более чем счетное множество, то данная топология метризуема;

(с) если T более чем счетно, то данную топологию нельзя задать метрикой.

Частично упорядоченное множество T называется *направленным*, если для всяких $t, s \in T$ найдется $u \in T$ такое, что $t \leq u$ и $s \leq u$. Набор элементов $\{x_t\}_{t \in T}$, индексируемых направленным множеством T , называется направленностью. Направленность $\{x_t\}_{t \in T}$ называется поднаправленностью $\{y_s\}_{s \in S}$, если существует такое отображение $\pi: T \mapsto S$, что $x_t = y_{\pi(t)}$ и для всякого $s_0 \in S$ найдется $t_0 \in T$, что $\pi(t) \geq s_0$ для всех $t \geq t_0$. Направленность $\{x_t\}_{t \in T}$ сходится к элементу x , если для всякого открытого множества U , содержащего x , найдется t_0 такое, что $x_t \in U$ для всех $t \geq t_0$.

Задача 23. Приведите пример направленности $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ элементов \mathbb{R} с обычной топологией, которая сходится к нулю, но бесконечно много ее элементов лежит вне $(-1, 1)$.

Задача 24. Докажите, что для всякой предельной точки a некоторого множества E (всякое открытое множество, содержащее a , содержит отличный от a элемент множества E) найдется направленность из элементов E , сходящаяся к a . Приведите пример предельной точки, для которой нет сходящейся к ней последовательности элементов E .