Листок 4. Непрерывные функции нескольких переменных.

Задача 1. Приведите пример функции $f(x,y)$ непрерывной вдоль всякой прямой, но разрывной по совокупности переменных.

Задача 2. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x и равномерно непрерывна по y, т. е. $\sup_x |f(x,y)-f(x,y_0)| \to 0$ при $y \to y_0$. Докажите, что f непрерывна по совокупности переменных.

Задача 3. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности. Докажите, что найдется хотя бы одна точка, в которой f непрерывна по совокупности переменных. (Указание: приблизить функцию последовательностью непрерывных функций и воспользоваться тем, что у предела такой последовательности есть точка непрерывности.)

Задача 4. Функция $f(x,y)$ непрерывна по каждой переменной в отдельности и обращается в ноль на счетном всюду плотном множестве в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $f \equiv 0$. (Указание: применить теорему Бэра.)

Задача 5. Докажите, что пространство $C([0,1]\times[0,1])$ сепарабельно.

Задача 6. Докажите, что обратное отображение непрерывной биекции компакта на компакт является непрерывным.

Задача 7. Докажите, что не существует непрерывной биекции

(a) отрезка на квадрат (b) отрезка на окружность (c) окружности на круг.

Существуют ли функции нескольких переменных?

Задача 8. (a) Всякую ли функцию двух переменных можно представить в виде $h(\varphi(x)+\psi(y))$, где h,φ,ψ – функции одной переменной.

(b) Докажите, что не существует непрерывных функций h,φ,ψ на $\mathbb{R}$ таких, что

$$xy = h(\varphi(x)+\psi(y)).$$

Выведите из этого результата, что множество функций вида $h(\varphi(x)+\psi(y))$ не является замкнутым в пространстве $C([0,1]\times[0,1])$.

Задача 9.* Докажите, что множество функций вида $h(\varphi(x)+\psi(y))$ нигде не плотно в пространстве $C([0,1]\times[0,1])$.

Задача 10. (a) Всякую ли функцию трех переменных $f(x,y,z)$ можно представить в виде $h(z,g(x,y))$, где h,g – функции двух переменных?

(b) Можно ли функцию $xy+yz+xz$ представить в указанном выше виде с помощью *непрерывных* функций h и g?

Задача 11. Пусть $\Delta=[0,4]$ и $\Delta_j=\Delta+5j$, где $j\in\mathbb{Z}$. Через I_k, $k=1,2,\dots 5$, обозначим систему отрезков вида $\Delta_j^k=\Delta_j+k$.

(a) Докажите, что всякая точка x лежит в каком-то из интервалов системы I_k для всех $k=1,2,\dots 5$, кроме быть может одного.

(b) Докажите, что всякая точка (x,y) лежит в каком-то из квадратов $\Delta_{ij}^k=\Delta_i^k\times\Delta_j^k$ для всех $k=1,2,\dots 5$, кроме быть может двух.

(c) Пусть φ – непрерывная функция, постоянна на отрезках Δ_j. Предположим, что на этих отрезках функция принимает рациональные значения, причем на разных отрезках различные значения. Докажите, что функция $\varphi(x)+\sqrt{2}\varphi(y)$ постоянная на квадратах $\Delta_{ij}=\Delta_i\times\Delta_j$, причем на разных квадратах она принимает различные значения.

Далее через $N^{-1}\Delta_j$ обозначаем отрезки $[0,4N^{-1}]+5N^{-1}j$. Полагаем $N^{-1}\Delta_j^k=N^{-1}\Delta_j+kN^{-1}$.

Задача 12. Докажите, что для всякой непрерывной функции ψ и всякого $\varepsilon>0$ найдется такое число N и непрерывная функция φ, что φ постоянна на всяком $N^{-1}\Delta_j$, принимает на этих отрезках рациональные значения, причем на разных отрезках различные значения, и $\max_{[0,1]}|\psi(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$.

Пусть $f(x,y)$ – непрерывная функция на $[0,1]\times[0,1]$ и $M=\max_{[0,1]^2}|f(x,y)|$. Пусть X является декартовым произведением пяти пространств $C([0,1])$. Заметим, что X – полное метрическое пространство.

Рассмотрим множество $Y(f)$ наборов $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5)$ из X,таких, что для каждого из них найдутся (свои) непрерывные на $\mathbb{R}$ функции $h_1, h_2, \ldots, h_5$, для которых выполнены условия:

$$\sup_t |h_k(t)| \le M/3, \quad \max_{[0,1]^2}\Big|f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y))\Big| < \frac{5}{6}M. \quad (*)$$

Задача 13. Докажите, что $Y(f)$ – открытое множество в X.

Пусть дан произвольный набор $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_5)$ из X. Покажем, что сколь угодно близко (по метрике X) к этому набору найдется набор из $Y(f)$. Действительно, используя задачу 12 найдем достаточно большое N и функции φ_k такие, что φ_k мало отличается от ψ_k на $[0,1]$ и φ_k постоянна на всех отрезках $N^{-1}\Delta_j^k$, причем на каждом из этих отрезках она принимает рациональные значения, на разных отрезках – разные значения.

В каждом квадрате $N^{-1}\Delta_i^k \times N^{-1}\Delta_j^k$ выберем точку (ξ_{ij}, η_{ij}) и построим непрерывную функцию h_k так, что $h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)) = \frac{1}{3}f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$.

Задача 14. Постройте такую функцию h_k.

Увеличивая N (т. е. уменьшая квадраты) можно считать колебание функции f на каждом квадрате $N^{-1}\Delta_i^k \times N^{-1}\Delta_j^k$ меньше $M/6$. Тогда

$$|f(x,y) - \sum_{k=1}^{5} h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y))| < \frac{M}{6} + \frac{2M}{3} = \frac{5M}{6}.$$

Задача 15. Обоснуйте последнее неравенство.

Таким образом множество $Y(f)$ не пусто и плотно в X. Выберем в $C([0,1]\times[0,1])$ счетное всюду плотное множество функций f_l.

Задача 16. Докажите, что $\bigcap_{l=1}^{\infty} Y(f_l) \ne \emptyset$. (Указание: применить теорему Бэра.)

Пусть $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5) \in \bigcap_{l=1}^{\infty} Y(f_l)$.

Задача 17. Докажите, что для всякой функции $f \in C([0,1] \times [0,1])$ найдутся непрерывные функции $h_1, \ldots, h_5$, для которых выполняются неравенства (*) с функциями $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5)$.

Задача 18. Докажите теорему А.Н.Колмогорова: для всякой непрерывной функции $f(x,y)$ на $[0,1]\times[0,1]$ найдутся такие непрерывные функции h_k и φ_k одной переменной, что

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{5} h_k(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\varphi_k(y)).$$

Задача 19*. Обобщите результат задачи 18 на случай непрерывной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Задача 20*. Докажите, что можно выбрать $h_1 = h_2 = \ldots = h_5 = h$.