Листок 7. Производные высокого порядка. Локальный экстремум.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция в окрестности точки a. Если функция $x \mapsto \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ имеет частную производную в точке a по переменной x_k, то эту производную называют производной второго порядка по x_i и x_k и обозначают через $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a)$. Аналогичным образом определяются частные производные более высокого порядка:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\Big(\ldots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\Big)\Big).$$

Вопрос: зависит ли результат от того, в каком порядке дифференцировать?

Задача 1. Приведите пример функции f двух переменных, у которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Задача 2. (Теорема Шварца) Докажите, что если функции $(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ и $(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ непрерывны в точке (a,b), то частные производные второго порядка по x и y и по y и x в точке (a,b) совпадают.

Указание: рассмотреть функцию $F(u,v) = f(a+u,b+v) - f(a,b+v) - f(a+u,b) + f(a,b)$ и применить теорему Лагранжа о среднем.

Задача 3. (Теорема Юнга) Докажите, что если отображения $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ дифференцируемы в точке (a,b), частные производные второго порядка по x и y и по y и x в точке (a,b) совпадают.

Функция $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ является m – раз дифференцируемой функцией в точке a, если все ее частные производные $m-1$ порядка дифференцируемы в точке a. Положим

$$d^m f(a,h) = \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le n} \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} h_{i_1} \cdots h_{i_m}, \quad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Задача 4. Докажите, что $d^m f(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f$. Найдите $d^m f$ от функции $e^{ax+by+cz}$.

Учитывая, что $dx_i(h) = h_i$, в выражении $d^m f$ вместо h_i пишут dx_i. Например, $d^2 f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$.

Упр 1. Что такое $d^3 x$, dx^3 и $(dx)^3$?

Задача 5. Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – дважды дифференцируемое отображение (т. е. $g = (g_1, \ldots, g_m)$ и g_i – дважды дифференцируемые функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$). Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция. Найдите $d^2(f \circ g)$.

Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности U точки a. Тогда задано отображение $f'(x) = df(x, \cdot)$ из U в пространство линейных функций. Напомним, что пространство линейных функций является нормированным пространством.

Задача 6. Докажите, что f дважды дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда отображение f' дифференцируемо в точке a. Найдите $d(f')$.

Задача 7. (Формула Тейлора) Пусть f – n–раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки a (т. е. в некоторой окрестности существуют все частные производные до порядка n включительно и являются непрерывными функциями). Тогда

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(a,h) + \alpha(h)\|h\|^m, \quad \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0.$$

Задача 8. Приведите пример бесконечно гладкой функции f на $\mathbb{R}^n$, которая строго положительна при $\|x\| < 1$ и равна нулю при $\|x\| \geq 1$.

Задача 9. Пусть F – произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует бесконечно гладкая функция, принимающая значение 0 в точках F и только в них.

Задача 10. Пусть F_0 и F_1 — два произвольных непересекающихся замкнутых множества в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует бесконечно гладкая функция, принимающая значение 0 на множестве F_0, значение 1 на множестве F_1, и значения строго между 0 и 1 в остальных точках $\mathbb{R}^n$.

Задача 11. (Необходимое условие локального экстремума) Пусть N – нормированное пространство. Предположим, что f определена в некоторой окрестности $U \subset N$ точки a и $f(x) \geq f(a)$ для всех $x \in U$ ($f(x) \leq f(a)$ для всех $x \in U$). Если f дифференцируема в точке a, то $df(a, \cdot) = 0$.

Задача 12. Пусть $F(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$ – отображение $C^1([0,1])$ в $\mathbb{R}$. Функция $L(t, x, p)$ всюду дважды непрерывно дифференцируема. Найдите дифференциал отображения F.

Задача 13. В условиях предыдущей задачи предположим, что для некоторой функции $x \in C^2([0,1])$ выполняется неравенство $F(x) \leq F(x+h)$ для всех $h \in C^1([0,1])$ таких, что $h(0) = h(1) = 0$. Покажите, что $dF(x, h) = 0$ при $h \in C^1([0,1])$, $h(0) = h(1) = 0$. Докажите, что для функции x выполняются уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} L_p(t, x(t), \dot{x}(t)) + L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad L_p = \frac{\partial L}{\partial p}, L_x = \frac{\partial L}{\partial p}.$$

Задача 14. Пусть $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\dot{x}(t))^2}{2} - U(x(t))\, dt$, где U – непрерывно дифференцируемая функция. Пусть $x \in C^2([0,1])$ и $F(x) \leq F(y)$ для всех y таких, что $y(0) = x(0)$ и $y(1) = x(1)$. Докажите, что $\ddot{x} = -U'(x)$.

Задача 15. Пусть частица без трения под действием силы тяжести двигается по кривой, задаваемой графиком функции $x = x(t)$, причем $x(0) = 1$ и $x(1) = 0$. Какой формы должна быть кривая, чтобы время спуска было минимальным?

Указание: $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\dot{x}(t))^2}{t}}\, dt$.

Задача 16. (Достаточные условия локального экстремума) Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и $df(a, \cdot) = 0$. Докажите, что

(i) $d^2 f(a, h) > 0$ при всех $h \neq 0$, то a – точка локального минимума;

(ii) $d^2 f(a, h) < 0$ при всех $h \neq 0$, то a – точка локального максимума;

(iii) если выражение $d^2 f(a, h)$ принимает значения разных знаков, то a не является точкой локального экстремума.

Задача 17. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Задача 18. Найдите все критические точки (точки, в которых $\mathrm{gradf} = 0$) функции $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ и классифицируйте их.

Будем говорит, что функция f на $\mathbb{R}^n$ выпукла, если $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ для всех x, y и всех $\alpha \in [0,1]$.

Задача 19. Пусть f – дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $\langle \mathrm{grad} f(x) - \mathrm{grad} f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Задача 20. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $d^2 f(h) \geq 0$.

Задача 21. Докажите, что если $d^2 f(h) \geq m\|h\|^2$, $m > 0$, то f имеет ровно одну точку локального экстремума – точка минимума.

Задача 22.(Метод градиентного спуска) Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема и $m\|h\|^2 \leq d^2 f(h) \leq M\|h\|^2$, где $m, M > 0$. Пусть $x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot \mathrm{grad} f(x_n)$, где $0 < \gamma < 2/M$. Докажите, что последовательность x_n сходится к точке минимума. Проиллюстрируйте этот метод на примере функции $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Задача 23. Пусть f дважды непрерывно дифференцируема и $d^2 f(h) \leq M\|h\|^2$, где $M > 0$. Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Зададим положительное число $\tau < 1/M$. Пусть x_{n+1} – точка минимума функции

$$x \mapsto \frac{1}{2\tau}\|x_n - x\|^2 + f(x).$$

Соединим точки x_n отрезками. Докажите, что при $\tau \to 0$ полученная ломанная сходится к кривой $x(t)$, которая является решением задачи Коши $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(t) = -\mathrm{grad} f(x(t))$.