

Листок 1. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

Задача 1: Покажите, что функционалы

$$W_1[h, \mathbf{x}] = \int h^{1/2} h^{ab} \partial_a \mathbf{x} \partial_b \mathbf{x} d^2 \xi \quad \text{и} \quad W_2[\mathbf{x}] = \int (\det \|\partial_a \mathbf{x} \partial_b \mathbf{x}\|)^{1/2} d^2 \xi \quad (0.1)$$

классически эквивалентны.

Задача 2: Покажите, что операторы $L_n = ie^{n\theta} \frac{d}{d\theta}$ образуют не расширенную алгебру Вирасоро

$$[L_n, L_m] = i(n - m)L_{n+m}. \quad (0.2)$$

Задача 3: Рассмотрите центральное расширение алгебры Вирасоро вида

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + A(n)\delta_{n+m,0}. \quad (0.3)$$

Используя тождество Якоби, покажите, что $A(n) = c(n^3 - n)$, где c — константа.

Задача 4: Покажите, что генераторы $L_n = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{n-m}^\mu a_m^\mu$ и $L_0 = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}^\mu a_n^\mu$, где $\mu = 0, \dots, D - 1$ и по повторяющемуся μ подразумевается суммирование, удовлетворяют алгебре Вирасоро:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{D}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}. \quad (0.4)$$

Для этого найдите вначале коммутатор $[L_n, a_m^\mu]$ (бозонные генераторы a_n^μ удовлетворяют коммутационным соотношениям вида $[a_n^\mu, a_m^\nu] = n\delta_{n+m,0}\delta^{\mu\nu}$).

Задача 5: Рассмотрим общий вид состояния на первом уровне

$$|\psi\rangle = \xi_\mu a_{-1}^\mu |0; k\rangle. \quad (0.5)$$

Физическим называется состояние, для которого верно $L_n |\psi\rangle = 0$, для всех $n > 1$ и $L_0 |\psi\rangle = a |\psi\rangle$, найдите отсюда, каким должно быть ξ_μ . Как связаны a и k^μ ? Найдите при каких a и D будут физические состояния с отрицательными нормами? с нулевой нормой? только с положительными?

Задача 6: Прodelайте тоже самое, что и в Задаче 5, но только для состояния на втором уровне, общий вид которого можно записать как

$$|\psi\rangle = (A_{\mu\nu} a_{-1}^\mu a_{-1}^\nu + B_\mu a_{-2}^\mu) |0; k\rangle. \quad (0.6)$$

Задача*:** Всегда ли на двумерном многообразии можно глобально привести (диффеоморфизмами) метрику к конформному виду:

$$h_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab}? \quad (0.7)$$