Листок 7. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

В данном листке мы изучим алгебру суперпуанкаре и ее представления в десяти измерениях и четырех измерениях.

Задача 1. Алгебра суперпуанкаре. В десяти измерениях алгебра $N = 1$ суперпуанкаре состоит из генераторов суперсимметрии Q_α, импульса P_μ, и момента $M_{\mu\nu}$. Помимо обычной алгебры Пуанкаре, они удовлетворяют соотношениям

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \tag{0.1}$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \tag{0.2}$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = 0 \tag{0.3}$$

Здесь Q_α – 16-ти компонентный спинор, γ^μ - гамма-матрицы 16×16. Они связаны с 32-компонентными гамма матрицами как

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \\ (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

при этом 32-компонентный спинор разбивается на два вейлевских как

$$\Psi = \begin{pmatrix} S_\alpha \\ S'^\alpha \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

(a) В теории струн суперзаряд имеет разный вид в зависимости от картины. Мы приведем выражения в картинах $\pm\frac{1}{2}$

$$Q_\alpha^{(-1/2)} = \int dz\, e^{-\phi/2} S_\alpha \tag{0.6}$$

$$Q_\alpha^{(1/2)} = \int dz\, e^{\phi/2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S'^\beta \partial X^\mu \tag{0.7}$$

Используя эти выражения, покажите, что, с точностью до нормировки, их коммутатор равен удовлетворяет алгебре суперпуанкаре

$$\{Q_\alpha^{(1/2)}, Q_\beta^{(-1/2)}\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu^{(0)} \tag{0.8}$$

где оператор импульса в картине 0 имеет вид

$$P_\mu^{(0)} = \int dz\, \partial X_\mu \tag{0.9}$$

Покажите также, что верно

$$\{Q_\alpha^{(-1/2)}, Q_\beta^{(-1/2)}\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu^{(-1)} \tag{0.10}$$

где оператор импульса в картине -1 имеет вид

$$P_\mu^{(0)} = \int dz\, e^{-\phi} \psi^\mu \tag{0.11}$$

Напомним, что ϕ – один из бозонов в бозонизации $\beta-\gamma$ системы, он имеет операторное разложение

$$\phi(z)\phi(w) \sim -\ln(z-w) \tag{0.12}$$

Напомним также, что S_α, S'^β два 16-компонентных спинора противоположной киральности. Они имеют операторные разложения

$$\psi^\mu(z)S_\alpha(0) \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}S'^\beta(0) \tag{0.13}$$

$$\psi^\mu(z)S'^\alpha(0) \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}(\gamma^\mu)^{\alpha\beta}S_\beta(0) \tag{0.14}$$

$$S_\alpha(z)S_\beta(0) \sim \frac{1}{z^{3/4}}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\psi_{+\mu}(0) \tag{0.15}$$

$$S'^\alpha(z)S_\beta(0) \sim \frac{\delta^\alpha_\beta}{z^{5/4}} + \frac{1}{2z^{1/4}}(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta j_{\mu\nu}(0) \tag{0.16}$$

$$j^{\mu\nu}(z)S_\alpha(0) \sim \frac{1}{2z}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta S_\beta(0) \tag{0.17}$$

здесь $j^{\mu\nu} =: \psi^\mu\psi^\nu :$.

(б) Используя выражения для операторов импульса и поворота Лоренца

$$P^{(0)}_\mu = \int dz\, \partial X_\mu \tag{0.18}$$

$$M^{(0)}_{\mu\nu} = \int dz\, (\psi_\mu\psi_\nu + \frac{1}{2}X_\mu\partial X_\nu - \frac{1}{2}\partial X_\nu X_\mu) \tag{0.19}$$

найдите остальные коммутаторы из алгебры суперпуанкаре.

Задача 2. Действие суперсимметрии на состояния открытой струны . Напомним, что безмассовые вертексные операторы открытой струны имеет вид

$$V^{(0)}_{\text{NS}}(\varepsilon,k) = \varepsilon_\mu(\partial x^\mu + i\psi^\mu\psi^\nu k_\nu)e^{ikx} \tag{0.20}$$

$$V^{(-1)}_{\text{NS}}(\varepsilon,k) = \varepsilon_\mu\psi^\mu e^{-\phi}e^{ikx} \tag{0.21}$$

$$V^{(-1/2)}_{\text{R}}(u,k) = u^\alpha S_\alpha e^{-\phi/2}e^{ikx} \tag{0.22}$$

Мы привели два выражения для вертексного оператора из NS-сектора в разных картинах. Здесь $\varepsilon_\mu, u^\alpha$ – это поляризации частиц.

(а) Используя выражения для суперзаряда из предыдущей задачи, покажете, что действие суперсимметрии на эти состояния переводит фермионы и бозоны в друг друга. Используйте заряды в обоих картинах $\pm\frac{1}{2}$.

Задача 3. Действие суперсимметрии на состояния замкнутой струны. Напомним, что безмассовые вертексные операторы замкнутой струны имеет вид

$$V^{(-1,-1)}_{\text{NS-NS}}(\varepsilon,k) = \varepsilon_{\mu\nu}\psi^\mu\widetilde{\psi}^\nu e^{-\phi-\widetilde{\phi}}e^{ikx} \tag{0.23}$$

$$V^{(-1,-1/2)}_{\text{NS-R}}(u,k) = u^\alpha_\mu\psi^\mu\widetilde{S}_\alpha e^{-\phi-\widetilde{\phi}/2}e^{ikx} \tag{0.24}$$

$$V^{(-1/2,-1)}_{\text{R-NS}}(v,k) = v^\alpha_\mu\psi^\mu S_\alpha\widetilde{\psi}^\mu e^{-\phi/2-\widetilde{\phi}}e^{ikx} \tag{0.25}$$

$$V^{(-1/2)}_{\text{R-R}}(\eta,k) = \eta^{\alpha\beta}S_\alpha\widetilde{S}_\beta e^{-\phi/2-\widetilde{\phi}/2}e^{ikx} \tag{0.26}$$

Волной обозначаются операторы в антиголоморфном секторе.

(а) Используя выражения для суперзаряда из первой задачи, покажете, что действие суперсимметрии на эти состояния переводит фермионы и бозоны в друг друга. Используйте заряды в обоих картинах $\pm\frac{1}{2}$.

Задача 4. Состояния открытой струны в 4-х измерениях. В данной задаче мы найдем состояния открытой струны, компактифицированной на 6-тимерное многообразие. Напомним, что вертексный оператор, описывающий физические состояния открытой струны должен удовлетворять следующим условиям:
1. Он должен быть замкнутым относительно BRST-заряда

$$Q_B = \int dz \left[cT^m + \gamma G^m + \frac{1}{2}\left(cT^{gh} + \gamma G^{gh}\right)\right] \tag{0.27}$$

2. Он должен иметь размерность $\Delta = 1$. (Это на самом деле следует из предыдущего пункта)
3. Состояния отличающиеся на BRST-точный член эквивалентны.
4. Он должен удовлетворять условию GSO-проекции.

Сделаем несколько комментариев по поводу этих условий. Во-первых, мы будем считать, что материальная часть нашей теории состоит из двух составляющих: пространственно-временной и компактной. Пространство-временная часть это 4-мерная свободная теория. Она состоит из полей ψ^μ, X^μ, где $\mu = 0, \ldots, 3$. А компактная часть является некоторой $N = 2$ суперконформной теорией с центральным зарядом $c_{int} = 9$. Напомним, что в $N = 2$ суперконформной алгебре имеется $U(1)$-ток $J(z)$. Мы будем использовать следующую его бозонизацию

$$J(z) = i\sqrt{3}H(z) \tag{0.28}$$

$$H(z)H(w) \sim -\ln(z - w) \tag{0.29}$$

Тогда условие GSO-проекции требует, чтобы вертексный оператор имел четный заряд относительно тока

$$j_{GSO} = -\partial\phi + i\partial H_0 + i\partial H_1 + i\partial\sqrt{3}H \tag{0.30}$$

где H_0, H_1 –бозонизация фермионов ψ_μ, $\mu = 0, \ldots, 3$.

(а) Напишем вертексный оператор для безмассового ($k_\mu k^\mu = 0$) скаляра. Из свойств относительно преобразований Лоренца он должен иметь вид

$$V(z) = \Lambda e^{-\phi} e^{ikX} \tag{0.31}$$

где Λ – некоторый оператор из компактной части. Найдите какие размерность и заряд относительно $J(z)$ должен иметь Λ для того, чтобы $V(z)$ было физическим состоянием. Используйте также то, что в $N = 2$ суперконформной алгебе в NS-секторе имеется ограничение $2\Delta \geq |Q|$, где Δ – размерность оператора, а Q – его заряд относительно $J(z)$.

Покажите, что поле Λ является киральным или антикиральным, т.е. удовлетворяет $2\Delta = \pm Q$ соответственно.

(б) Напишем вертексный оператор для безмассовой пространственно-временной векторной частицы. Из его свойств относительно относительно преобразования Лоренца

$$V(z) = \varepsilon_\mu \psi^\mu e^{-\phi} e^{ikX} \tag{0.32}$$

Найдите какие условия на ε_μ накладывает требования физичности состояния.

(в) Напишем вертексный оператор для безмассового пространственно-временного фермиона. Из его свойств относительно преобразований Лоренца он должен иметь вид

$$V(z) = u^\alpha S_\alpha \Sigma e^{-\phi/2} e^{ikX} + v^{\dot\alpha} S_{\dot\alpha} \overline{\Sigma} e^{-\phi/2} e^{ikX} \tag{0.33}$$

здесь, в отличи от десятимерного случая, S_α, $S_{\dot\alpha}$ – вейлевские спиноры в 4-измерениях. В терминах бозонизации они имеют вид

$$S_\alpha = e^{\pm\frac{1}{2}(iH_0+iH_1)} \tag{0.34}$$

$$S_{\dot\alpha} = e^{\pm\frac{1}{2}(iH_0-iH_1)} \tag{0.35}$$

разные знаки соответствуют разным значениям $\alpha, \dot\alpha$.

Найдите условия на размерности и заряд относительно $J(z)$ операторов Σ и $\overline{\Sigma}$, которые накладывает условие физичности. Найдите также условия на поляризации u_α, $v_{\dot\alpha}$. Покажете, что Σ и $\overline{\Sigma}$ должны быть рамоновскими вакуумами для компактной части теории, т.е. удовлетворять условию $\Delta = \frac{c_{int}}{24}$, где $c_{int} = 9$. Используйте также, что в рамоновском секторе имеется ограничение на размерность поля $\Delta \geq \frac{Q^2}{6}$, где Q – $U(1)$-заряд.

Замечание. Среди пространственно временных фермионов, построенных в предыдущем пункте имеются один выделенный тем, что Σ имеет $J(z)$ заряд равный $\frac{3}{2}$, а $\overline{\Sigma}$ заряд $-\frac{3}{2}$. Можно показать, что имеется только один оператор с такими зарядами в компактной теории. Действительно выделим из Σ заряженную часть.

$$\Sigma = \Sigma' e^{i\frac{3}{2\sqrt{3}}H} \tag{0.36}$$

Размерность Σ' равна 0. (Размерность $e^{\alpha H}$ равна $\frac{\alpha^2}{2}$). Т.к. мы считаем, что в компактной теории только единичный оператор имеет размерность 0, то операторы с зарядом $\frac{3}{2}$ единственный.

Задача 5. Действие суперсимметрии на состояния открытой струны. Для компактифицированной теории суперзаряд в картинах $\pm\frac{1}{2}$ имеет вид

$$Q_\alpha^{(-1/2)} = \int dz\, e^{-\phi/2} S_\alpha e^{i\frac{3}{2\sqrt{3}}H} \tag{0.37}$$

$$Q_{\dot\alpha}^{(-1/2)} = \int dz\, e^{-\phi/2} S_{\dot\alpha} e^{-i\frac{3}{2\sqrt{3}}H} \tag{0.38}$$

$$Q_\alpha^{(1/2)} = \int dz\, e^{\phi/2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} S^\beta e^{i\frac{3}{2\sqrt{3}}H} \partial X^\mu \tag{0.39}$$

$$Q_{\dot\alpha}^{(1/2)} = \int dz\, e^{\phi/2} (\gamma_\mu)_{\dot\alpha\dot\beta} S^{\dot\beta} e^{-i\frac{3}{2\sqrt{3}}H} \partial X^\mu \tag{0.40}$$

(а) Покажите, что эти суперзаряды удовлетворяют алгебре суперпуанкаре.

(б) Найдите их действие на безмассовые состояния, построенные в предыдущей задаче.

(в) Сделаем сначала три наблюдения. Мы отмечали в предыдущей задаче, что компактная часть Λ полей, соответствующих скалярам, является киральным или антикиральным полем ($2\Delta = \pm Q$). С другой стороны компактная часть $\Sigma, \overline{\Sigma}$ полей, соответствующий фермионам, являлась рамоновским вакуумом ($\Delta = \frac{c_{int}}{24} = \frac{3}{8}$). Наконец, в явном выражении для суперзаряда из компактной части содержится только экспонента $e^{\pm i\frac{3}{2\sqrt{3}}H}$, которая, как было показано в листке 6, генерирует спектральные потоки в компактной $N=2$ суперконформной алгебре с $\eta = \pm\frac{1}{2}$.

Т.к. мы знаем, что поля в NS- и R-секторах связаны действием суперсимметрии, то киральные поля и рамоновкие вакуумы должны переходить в друг друга под действием спектрального потока. Это является общим фактом. Напомним, что спектральный поток U_η меняет размерности и заряды полей по формулам

$$\Delta' = \Delta + \eta q + \frac{1}{6}\eta^2 c \tag{0.41}$$

$$q' = q + \frac{c}{3}\eta \tag{0.42}$$

Используя эти формулы, покажите, что киральное поле переходит в рамоновский вакуум

$$U_{-1/2}|\Delta = \frac{q}{2}, Q = q\rangle_{NS} = |\Delta = \frac{c}{24}, Q = q - \frac{c}{6}\rangle_R \tag{0.43}$$

и найдите также действие спектрального потока с $\eta = \frac{1}{2}$ на антикиральное поле.