Листок 1

1.1. а) Докажите, что касательное пространство в единице к группе Ли $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ есть пространство $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ матриц с нулевым следом. Найдите его размерность.

б) Докажите, что касательное пространство в единице к группе Ли $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ есть пространство $\mathfrak{o}(n,\mathbb{R})$ кососимметрических матриц. Найдите его размерность.

Напомним, что группа *унитарных* матриц $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ задается условием $AA^* = E$.

1.2. а) Докажите, что $\mathrm{U}(n)$ является вещественной группой Ли, опишите ее касательное пространство в единице и найдите его размерность. Является ли эта группа комплексной группой Ли?

б) Ответьте на те же вопросы для группы $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

1.3. а) Докажите, что сфера S^{n-1} является однородным пространством для группы Ли $\mathrm{SO}(n)$, и найдите стабилизатор точки для этого действия.

б) Докажите, что сфера S^{2n-1} является однородным пространством для группы Ли $\mathrm{U}(n)$, и найдите стабилизатор точки для этого действия.

Многообразием Грассмана $\mathrm{Gr}(k,\mathbb{R}^n)$ называется множество всех k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

1.4. Докажите, что $\mathrm{Gr}(k,\mathbb{R}^n)$ является однородным пространством для следующих групп Ли, и найдите стабилизаторы точки для этих действий:

а) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$;

б) $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$.

в) Покажите, что $\mathrm{Gr}(k,\mathbb{R}^n)$ — гладкое многообразие, и найдите его размерность.

Многообразием полных флагов $\mathcal{F}\ell(n,\mathbb{K})$ называется множество цепочек вложенных подпространств $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \cong \mathbb{K}^n$, где $\dim V_k = k$.

1.5. Докажите, что:

а) $\mathcal{F}\ell(n,\mathbb{K}) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})/B_n$, где B_n есть группа невырожденных верхнетреугольных матриц;

б) $\mathcal{F}\ell(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}(n)/T_n$, где T_n есть группа невырожденных диагональных матриц.

в) Докажите, что $\mathcal{F}\ell(n,\mathbb{K})$ — гладкое многообразие, и найдите его размерность.

1.6. Покажите, что действие $\mathrm{SU}(2)$ сопряжениями на касательном пространстве к единице задает сюръективный гомоморфизм $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, и найдите его ядро.

1.7. а) Докажите, что группа Ли $\mathrm{SU}(n)$ связна и односвязна.

б) Докажите, что $\pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $n \geq 3$.

Указание. Для доказательства шага индукции воспользуйтесь точной последовательностью расслоения.