Топология-1, семинар 1, 09.02.2015.

Задача 1. Докажите, что подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Задача 2. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве точки являются замкнутыми множествами.

Задача 3. Приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения между компактными пространствами, которое не является гомеоморфизмом.

Задача 4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если прообразы компактных подмножеств компактны. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y собственно.

Задача 5. Открытое инъективное отображение является вложением (в смысле индуцированной топологии). Аналогично, замкнутое инъективное отображение является вложением.

Задача 6. Докажите, что открытое сюръективное отображение является фактор-отображением (в смысле фактор-топологии). Аналогично, замкнутое сюръективное отображение является фактор-отображением.

Задача 7. Докажите, что индуцированная топология на $A \subset X$ является самой грубой из всех топологий, для которых отображение $A \hookrightarrow X$ непрерывно.

Задача 8. Докажите, что фактор-топология на $X/\!\sim$ является самой тонкой из всех топологий, для которых отображение $X \to X/\!\sim$ непрерывно.

Задача 9. Докажите, что если $A \subsetneq X$ и X/A хаусдорфово, то A замкнуто. Однако X/A может быть не хаусдорфовым даже если X хаусдорфово, а $A \subset X$ — замкнуто.

Задача 10. Докажите предложение 1.6: топология прямого произведения $X \times Y$ является самой грубой из топологий, в которых отображения стандартной проекции $p_X\colon X \times Y \to X$ и $p_Y\colon X \times Y \to Y$ непрерывны.

Задача 11. Докажите предложение 1.7: если $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$ – непрерывные отображения, то существует единственное непрерывное отображение $h\colon Z \to X \times Y$ такое, что $p_X \circ h = f$ и $p_Y \circ h = g$.

Задача 12. Докажите, что произведение конечного числа компактных пространств компактно. Соответствующее утверждение в случае бесконечного числа пространств известно как *теорема Тихонова* и является одним из самых значимых результатов общей топологии. Теорема Тихонова эквивалентна аксиоме выбора (полезно самостоятельно вывести аксиому выбора из теоремы Тихонова или разобрать доказательство).

Задача 13. Докажите, что канторово множество гомеоморфно произведению счётного числа дискретных пространств $\{0, 1\}$.

Задача 14. Проверьте универсальные свойства расслоенного произведения $X \times_A Y$ и склейки $X \cup_A Y$.

Задача 15. Что является произведением, копроизведением и кодекартовым квадратом в категориях групп и абелевых групп?

Задача 16. Верно ли, что для любого пространства Y пространство отображений $C(X, Y) = X^Y$ гомеоморфно произведению $\prod_{y \in Y} X$?

Задача 17. Докажите, что $\mathcal{C}(X, Y \times Z) \cong \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)$.

Задача 18. Пространство Y называется *локально компактным*, если для каждой точки $y \in Y$ найдётся окрестность, замыкание которой компактно.

Докажите, что если Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение композиции

$$\varphi\colon C(X, Y) \times C(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

непрерывно. В частности, *отображение вычисления* $e\colon Y \times C(Y, Z) \to Z$, $(y, f) \mapsto f(y)$, непрерывно.

Задача 19 (экспоненциальный закон)**.** Определено каноническое отображение $\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$, при котором отображение $f\colon X \times Y \to Z$ переходит во отображение $\Phi(f)\colon X \to \mathcal{C}(Y, Z)$, переводящее $x \in X$ в отображение $y \mapsto f(x, y)$.

Докажите, что если X хаусдорфово, а Y хаусдорфово и локально компактно, то Φ — гомеоморфизм.