

Задача 1. Докажите, что если пространство X линейно связно, любой путь из x_0 в x_1 задаёт изоморфизм между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$, который зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированными концом и началом). Указание: постройте и используйте отображение $\omega: S^n \rightarrow S^n \vee I$.

Задача 2. Докажите, что если $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ — накрытие, то индуцированное отображение $p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ — изоморфизм при $n \geq 2$.

Задача 3. Докажите, что $\pi_n(S^1 \vee S^1) = 0$ при $n \geq 2$.

Задача 4. Найдите гомотопические группы кренделя (сферы с двумя ручками).

Задача 5. Докажите, что гомотопическая эквивалентность $h: X \rightarrow \tilde{X}$ из теоремы о факторизации отображения, часть (а), является корасслоением, а гомотопическая эквивалентность $h: \hat{Y} \rightarrow Y$ из части (б) той же теоремы — расслоением в смысле Серра.

Задача 6. Докажите, что вложение верхнего основания цилиндра $i: X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 1)$, является корасслоением.

Задача 7. Докажите, что если X — клеточное пространство и $x \in X$, то вложение $i: x \rightarrow X$ является корасслоением.

Задача 8. Приведите пример пространства с отмеченной точкой (X, x_0) , для которого вложение $i: x_0 \rightarrow X$ не является корасслоением.

Задача 9. Докажите, что разложение из теоремы о факторизации отображения, часть (а), естественно в следующем смысле: коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

приводит к коммутативной диаграмме разложений

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X' & & \\ f \downarrow & \searrow h & \downarrow f' & \searrow h' & \\ & \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}' & \\ p \swarrow & & \downarrow & & \swarrow p' \\ Y & \longrightarrow & Y' & & \end{array}$$

Сформулируйте и докажите аналогичное свойство естественности для части (б).

Задача 10. Пространство, гомотопически эквивалентное слою расслоения $p: \tilde{X} \rightarrow Y$ из теоремы о факторизации отображения, часть (а), называется *гомотопическим слоем* отображения $f: X \rightarrow Y$ и обозначается $\text{hofib } f$. Докажите, используя естественность конструкции \tilde{X} (см. предыдущую задачу), что гомотопический слой определён корректно: для любого другого разложения $f = p' \circ h'$ в композицию гомотопической эквивалентности h' и расслоения p' пространство $\text{hofib } f$ гомотопически эквивалентно слою расслоения p' .

Задача 11. Фактор-пространство $\hat{Y}/i(X) = \hat{Y}/(X \times 1)$ пространства $\hat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ (цилиндра отображения) из теоремы о факторизации отображения, часть (б), по его верхнему основанию называется *конусом отображения* $f: X \rightarrow Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное конусу отображения f называется его *гомотопическим кослоем*. Проверьте корректность определения гомотопического кослоя по аналогии с предыдущей задачей.

Задача 12. Найдите гомотопический слой вложения точки $pt \rightarrow X$.

Задача 13. Найдите гомотопический кослой проекции в точку $X \rightarrow pt$.

Задача 14. Найдите гомотопический слой вложения букета $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$.

Задача 15. Найдите гомотопический слой вложения букета $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.