Топология-1, семинар 9, 06.04.2015.

Задача 1. Постройте накрытие букета двух окружностей букетом n окружностей при $n \geq 2$. Постройте накрытие поверхности S_2 (кренделя) поверхностью S_g (сферой с g ручками) при $g \geq 2$.

Задача 2. Накрытие $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ называется *регулярным*, если $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$. Докажите, что накрытие p регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в X не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в $\widetilde{X}$.

Задача 3. Докажите, что двулистные накрытия всегда регулярны. Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.

Задача 4. Докажите, что для накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ и любых точек $x, x' \in X$ имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами $p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(x')$. Мощность множества $p^{-1}(x)$ называется *числом листов накрытия p*.

Задача 5. Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — регулярное накрытие, то существует свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ на пространстве $\widetilde{X}$, такое, что $X = \widetilde{X}/G$ (точнее, орбиты действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). Определение действия группы G на пространстве X и пространства орбит X/G было дано ранее, в лекции 1. Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $gx \neq x$.

Задача 6. Действие группы G на пространстве Y называется *дискретным*, если каждая точка $y \in Y$ обладает такой окрестностью U, что множества gU, $g \in G$, попарно не пересекаются. Докажите, что если группа G действует на Y свободно и дискретно, то естественная проекция $p\colon Y \to X = Y/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$.