Топология-3, решение экзаменационных задач.

Задача 1. (1 балл) Пусть $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ и пусть задано действие циклической группы $\mathbb{Z}_n$ с образующей a на S^3 по формуле $a(z_1, z_2) = (e^{2\pi i/n}z_1, e^{2\pi ip/n}z_2)$, где $p \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с n. Пространство орбит этого действия называется линзовым пространством и обозначается $L(n; q)$. Опишите группы гомологий и кольцо когомологий с целыми коэффициентами пространства $L(n; q)$.

Решение. Поскольку действие $\mathbb{Z}_n$ на S^3 является частью действия бóльшей связной группы S^1 на S^3, это действие сохраняет ориентацию. Значит $L(n, q)$ — ориентируемое замкнутое многообразие. $L(n, q)$ связно, значит $H_0(L(n, q)) \cong \mathbb{Z}$. $L(n, q)$ является фактором односвязного пространства S^3 по свободному действию группы $\mathbb{Z}_n$. Значит $\pi_1(L(n, q)) = \mathbb{Z}_n$. Группа $H_1(L(n, q); \mathbb{Z})$ является абелианизацией фундаментальной группы, значит $H_1(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$. По теореме об универсальных коэффициентах, $H^1(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(L(n, q); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_0(L(n, q); \mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. По двойственности Пуанкаре из ориентируемости имеем $H_2(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong H^1(L(n, q); \mathbb{Z}) = 0$, $H^2(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong H_1(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$, $H_3(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong H^3(L(n, q); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Умножение в когомологиях тривиально по соображениям размерности.

Задача 2. (2 балла) Назовем билинейное отображение $f\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ невырожденным, если из условия $f(x, y) = 0$ следует либо $x = 0$, либо $y = 0$. Используя индуцированное непрерывное отображение $F\colon \mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, докажите, что число $\binom{n}{k}$ четно для всех k, удовлетворяющих неравенствам $n - s < k < r$.

Решение. Рассмотрим индуцированное отображение в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$:

$$F^*\colon H^*(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1}; \mathbb{Z}_2).$$

Пусть t, u, v — образующие колец когомологий $H^*(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$, $H^*(\mathbb{R}P^{r-1}; \mathbb{Z}_2)$, $H^*(\mathbb{R}P^{s-1}; \mathbb{Z}_2)$. По формуле Кюннета, $H^*(\mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1}; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(\mathbb{R}P^{r-1}; \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(\mathbb{R}P^{s-1}; \mathbb{Z}_2)$ (поскольку коэффициенты в поле). Значит гомоморфизм F^* имеет вид

$$F^*\colon \mathbb{Z}_2[t]/(t^n) \to \mathbb{Z}_2[u, v]/(u^r, v^s).$$

Докажем, что $F^*(t) = u + v$. Для этого докажем двойственное утверждение в гомологиях: пусть t', u', v' — образующие групп $H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, $H_1(\mathbb{R}P^r; \mathbb{Z}_2)$ и $H_1(\mathbb{R}P^s; \mathbb{Z}_2)$ соответственно. Тогда $H_1(\mathbb{R}P^r \times \mathbb{R}P^s; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2u' \oplus \mathbb{Z}_2v'$. Докажем, что $F_*(u') = F_*(v') = t'$. Образующая u' представлена в $\mathbb{R}P^{r-1}$ циклом, который в накрывающей сфере S^{r-1} поднимается до незамкнутого пути γ с концами в антиподальных точках. Поскольку исходное отображение f было билинейным, оно (при фиксированном ненулевом втором аргументе) переводит антиподальные точки на S^{r-1} в антиподальные точки на S^{n-1}. Значит $f(\gamma, *) \subset \mathbb{R}^n$ — путь с концами в антиподальных точках. Опускаясь на проективные пространства, получаем, что $F_*(u') = t'$. Аналогичным образом $F_*(v') = t'$. В итоге $F^*(t) = u + v$.

В $H^*(\mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$ имеем соотношение $t^n = 0$. Значит, $(u+v)^n = F^*(t)^n = F^*(t^n) = 0$ в кольце $\mathbb{Z}_2[u, v]/(u^r, v^s)$. При $n-s < k < r$ класс $u^k v^{n-k}$ не равен нулю в $\mathbb{Z}_2[u, v]/(u^r, v^s)$.

Значит, коэффициент выражения $(u+v)^n$ при $u^k v^{n-k}$ должен быть нулем $\mod 2$, откуда и следует утверждение.

Задача 3. (а, 1 балл) Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, на котором свободно действует группа $\mathbb{Z}_2$ (можно считать, что M является тотальным пространством главного $\mathbb{Z}_2$-расслоения). Докажите, что M является краем некоторого многообразия.

(б, 1 балл) Докажите, что многообразие Штифеля $V_{k,n}$ ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$ бордантно нулю.

Решение. (а) M — тотальное пространство главного $\mathbb{Z}_2$-расслоения (то есть $\mathbb{Z}_2$-расслоения со слоем $F = \{-1,+1\}$). Рассмотрим ассоциированное с ним расслоение со слоем отрезком $F = [-1,1]$. Тотальное пространство нового расслоения — это многообразие N с краем M.

Задача 4. Пусть $G_{4,2}$ — грассманниан комплексных 2-плоскостей в $\mathbb{C}^4$, а $c_1, c_2 \in H^*(G_{4,2};\mathbb{Z})$ — классы Черна его канонического расслоения γ_2.

(а, 1 балл) Найти числа Бетти многообразия $G_{4,2}$.

(б, 1 балл) Описать все полиномиальные соотношения на c_1, c_2 в кольце $H^*(G_{4,2};\mathbb{Z})$.

(в, 1 балл) Вычислить сигнатуру многообразия $G_{4,2}$.

(г, 2 балла) Доказать, что $TG_{4,2} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_2, \gamma_2^{\perp})$.

(д, 1 балл за каждый класс) Выразить классы Черна и классы Понтрягина комплексного многообразия $G_{4,2}$ через c_1, c_2.

Решение. (б) Имеем $H^*(G_{4,2};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,c_2,d_1,d_2]/(c_1+d_1, c_2+c_1d_1+d_2, c_1d_2+c_2d_1, c_2d_2)$, $\deg c_i = \deg d_i = 2i$. Избавляемся от d_i при помощи первых двух соотношений: $d_1 = -c_1$, $d_2 = c_1^2 - c_2$. Подставляя эти значения в оставшиеся два соотношения, получаем $c_1^3 = 2c_1c_2$ и $c_2^2 = c_1^2c_2$.

(а) Базис $H^0(G_{4,2};\mathbb{Z})$: 1. Базис $H^2(G_{4,2};\mathbb{Z})$: c_1. Базис $H^4(G_{4,2};\mathbb{Z})$: c_1^2, c_2. Базис $H^6(G_{4,2};\mathbb{Z})$: c_1c_2 (элемент c_1^3 выражается через c_1c_2). Базис $H^8(G_{4,2};\mathbb{Z})$: c_2^2 (элементы c_1^4 и $c_1^2c_2$ выражаются через него при помощи соотношений $c_1^4 = 2c_1^2c_2$ и $c_1^2c_2 = c_2^2$). Итого, для чисел Бетти имеем $\beta_0 = \beta_2 = \beta_6 = \beta_8 = 1$, $\beta_4 = 2$. Можно было то же самое получить через подсчет клеток Шуберта, разумеется.

(в) Далее будем предполагать, что ориентация на M задана таким образом, что $\int_{G_{4,2}} c_2^2 = 1$ (на самом деле это и есть ориентация, индуцированная комплексной структурой, в чем мы косвенно убедимся чуть позже). Запишем матрицу Грама для формы пересечений на $H^4(G_{4,2};\mathbb{Z})$ в базисе c_1^2, c_2:

$$(c_1^2, c_1^2) = \int_{G_{4,2}} c_1^4 = \int_{G_{4,2}} 2c_2^2 = 2, \quad (c_2,c_2) = \int_{G_{4,2}} c_2^2 = 1 \quad (c_1^2, c_2) = \int_{G_{4,2}} c_1^2c_2 = \int_{G_{4,2}} c_2^2 = 1.$$

Матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Видно, что она положительно определена (например, согласно критерию Сильвестра). Значит сигнатура формы пересечений равна 2.

(г) Докажем, что $TG_{m,n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n, \gamma_n^{\perp})$. Пусть $\Pi \in G_{m,n}$ — фиксированное n-мерное векторное подпространство в $\mathbb{C}^m$. Рассмотрим аналитическое отображение многообразий $F\colon \mathrm{GL}(\mathbb{C}^m) \to G_{m,n}$, $F(A) = A\Pi$. Рассмотрим дифференциал DF этого отображения в точке $\mathrm{id} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^m)$. Имеем линейное отображение $DF\colon T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{GL}(\mathbb{C}^m) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m) \to T_\Pi G_{m,n}$. Рассмотрим в группе $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ подгруппу $\mathrm{Fix}(\Pi) = \{A \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^m) \mid A\Pi = \Pi\}$. Имеем $F\colon \mathrm{Fix}(\Pi) \mapsto \Pi$. Значит дифференциал DF при ограничении на касательное пространство к подмногообразию $\mathrm{Fix}(\Pi)$ равен нулю: $DF(T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi)) = 0$.

Заметим, что $T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi) = \{C \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m) \mid C\Pi \subseteq \Pi\}$. Это легко получить по определению: пусть $A(t)$ — гладкая кривая в $\mathrm{Fix}(\Pi)$, такая что $A(0) = \mathrm{id}$. Тогда $C = \dot{A}(0)$. Имеем $A(t)v \in \Pi$ для любого $v \in \Pi$. Дифференцируя это включение по t получаем $Cv = \dot{A}(0)v \in \Pi$ для любого $v \in \Pi$.

Поскольку $DF(T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi)) = 0$, имеем индуцированное линейное отображение

$$\widetilde{DF}\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)/T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi) \to T_\Pi G_{m,n}.$$

Осталось заметить, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)/T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi)$ совпадает с $\mathrm{Hom}(\Pi, \Pi^\perp)$. Это можно увидеть, например, записав все в базисе:

$$T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi) = \{ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \Pi & \Pi^\perp \end{array} \\ \begin{array}{c} \Pi \\ \Pi^\perp \end{array} & \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \end{array} \}, \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)/T_{\mathrm{id}}\,\mathrm{Fix}(\Pi) = \{ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \Pi & \Pi^\perp \end{array} \\ \begin{array}{c} \Pi \\ \Pi^\perp \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \end{array} \} = \mathrm{Hom}(\Pi, \Pi^\perp).$$

Линейное отображение DF было сюръективно (поскольку любую плоскость можно получить из Π действием линейного оператора). Значит $\widetilde{DF}$ сюръективно. Наконец, размерности $\mathrm{Hom}(\Pi, \Pi^\perp)$ и $T_\Pi G_{m,n}$ совпадают. Значит $\widetilde{DF}$ изоморфизм.

(д) Требуется найти классы Черна расслоения $TG_{4,2} \cong \mathrm{Hom}(\gamma_2, \gamma_2^\perp) \cong \overline{\gamma_2} \otimes \gamma_2^\perp$ (последнее в силу естественного изоморфизма $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$).

Пусть t_1, t_2 — корни Черна расслоения γ_2, а s_1, s_2 — корни Черна расслоения $\gamma_2^\perp$. По упражнениям из листков, корнями Черна расслоения $\overline{\gamma_2} \otimes \gamma_2^\perp$ являются формальные элементы

$$-t_1 + s_1, -t_2 + s_1, -t_1 + s_2, -t_2 + s_2. \tag{1}$$

Дальнейшие действия скучны и монотонны: надо выразить каждый элементарный симметрический многочлен от элементов (1) через $t_1 + t_2 = c_1$, $t_1t_2 = c_2$, $s_1 + s_2 = d_1$, $s_1s_2 = d_2$.

(1) Для первого касательного класса Черна имеем

$$\begin{aligned} c_1(TG_{4,2}) = \sigma_1 = (-t_1 + s_1) + (-t_2 + s_1) + (-t_1 + s_2) + (-t_2 + s_2) = \\ = -2(t_1 + t_2) + 2(s_1 + s_2) = -2c_1 + 2d_1 = -4c_1. \end{aligned}$$

(2) Для следующих классов воспользуемся маленькой хитростью. Вместо второго элементарного симметрического многочлена посчитаем второй многочлен Ньютона

$$\begin{aligned} \pi_2 = (-t_1+s_1)^2+(-t_2+s_1)^2+(-t_1+s_2)^2+(-t_2+s_2)^2 = 2(t_1^2+t_2^2+s_1^2+s_2^2)-2(t_1+t_2)(s_1+s_2) = \\ = 2(c_1^2 - 2c_2 + d_1^2 - 2d_2) - 2c_1d_1 = 2(c_1^2 - 2c_2 + c_1^2 - 2c_1^2 + 2c_2) + 2c_1^2 = 2c_1^2. \end{aligned}$$

Теперь имеем $c_2(TG_{4,2}) = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \pi_2) = \frac{1}{2}(16c_1^2 - 2c_1^2) = 7c_1^2$.

(3) Имеем

$$\begin{aligned}
\pi_3 = (-t_1 + s_1)^3 + (-t_2 + s_1)^3 + (-t_1 + s_2)^3 + (-t_2 + s_2)^3 = \\
= 2(s_1^3 + s_2^3 - t_1^3 - t_2^3) + 3(s_1 + s_2)(t_1^2 + t_2^2) - 3(s_1^2 + s_2^2)(t_1 + t_2) = \\
= 2(d_1^3 - 3d_1d_2 - c_1^3 + 3c_1c_2) + 3d_1(c_1^2 - 2c_2) - 3c_1(d_1^2 - 2d_2) = \\
= (-4 + 6 - 4 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6)c_1c_2 = 4c_1c_2.
\end{aligned}$$

Согласно тождествам Ньютона, имеем $c_3(TG_{4,2}) = \sigma_3 = \frac{1}{3}(\pi_3 - \sigma_1\pi_2 + \sigma_2\pi_1) = \frac{1}{3}(4c_1c_2 - (-4c_1)2c_1^2 + 7c_1^2(-4c_1)) = -12c_1c_2$.

(4) Ленивый способ. Заметим, что $G_{4,2}$ — почти комплексное, поэтому $c_4(TG_{4,2}) = e(TG_{4,2})$. Имеем

$$\int_{G_{4,2}} c_4(TG_{4,2}) = \chi(G_{4,2}) = \beta_0 + \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_8 = 6.$$

Значит $c_4(TG_{4,2}) = 6c_2^2$, поскольку c_2^2 — единственный элемент $H^8(G_{4,2}; \mathbb{Z})$, интеграл которого по $G_{4,2}$ равен 1.

Посчитаем, однако, $c_4(TG_{4,2})$ по-старому, дабы проверить себя и убедиться в непротиворечивости математики. На этот раз проще посчитать напрямую, без использования многочлена Ньютона:

$$\begin{aligned}
c_4(TG_{4,2}) = (-t_1 + s_1)(-t_2 + s_1)(-t_1 + s_2)(-t_2 + s_2) = (c_2 - s_1c_1 + s_1^2)(c_2 - s_2c_1 + s_2^2) = \\
= c_2^2 - c_1c_2d_1 + c_2(d_1^2 - 2d_2) + c_1d_1 + c_1d_1d_2 + d_2^2 = (1 - (-1) + 1 + 1 - (-1) + 1)c_2^2 = 6c_2^2.
\end{aligned}$$

(5) Для классов Понтрягина имеем

$$1 - p_1(TG_{4,2}) + p_2(TG_{4,2}) = (1 - c_1(TG_{4,2}) + c_2(TG_{4,2}) - \ldots)(1 + c_1(TG_{4,2}) + \ldots).$$

Иными словами, корни Понтрягина являются квадратами корней Черна. Значит первый класс Понтрягина равен второму многочлену Ньютона от корней Черна. Мы это уже посчитали в пункте 2: $p_1(TG_{4,2}) = \pi_2 = 2c_1^2$.

(6) Лобовой способ: из формулы выше имеем:

$$\begin{aligned}
p_2(TG_{4,2}) = 2c_4(TG_{4,2}) - 2c_1(TG_{4,2})c_3(TG_{4,2}) + c_2(TG_{4,2})^2 = \\
= 12c_2^2 - 2(-12c_1c_2)(-4c_1) + (7c_1^2)^2 = (12 - 96 + 98)c_2^2 = 14c_2^2.
\end{aligned}$$

Хитрый способ. По теореме Хирцебруха о сигнатуре $\frac{1}{45}\int_{G_{4,2}}(7p_2(TG_{4,2}) - p_1(TG_{4,2})^2) = \sigma(G_{4,2}) = 2$. Значит $7p_2(TG_{4,2}) - p_1(TG_{4,2})^2 = 90c_2^2$. Мы знаем, что $p_1(TG_{4,2})^2 = (2c_1^2)^2 = 4c_1^4 = 8c_2^2$. Отсюда можно вычислить $p_2(TG_{4,2}) = 98c_2^2/7 = 14c_2^2$.

Задача 5. (a, 1 балл) Вычислить род Тодда комплексного многообразия $\mathbb{C}P^n$. (Замечание: выбор знака образующей кольца $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$ надо делать таким образом, чтобы $c(\mathbb{C}P^n) = (1 + t)^{n+1}$)

(б, 2 балла) Вычислить χ_y-род многообразия $\mathbb{C}P^n$ (χ_y-род — это род Хирцебруха стабильно комплексных многообразий, принимающий значение в $\mathbb{Q}[y]$, и заданный рядом $Q_y(t) = \dfrac{t(1+ye^{-t(1+y)})}{1-e^{-t(1+y)}} \in \mathbb{Q}[y][[t]]$. Род Тодда — это χ_0). Теоремой Хирцебруха о связи с числами Ходжа пользоваться нельзя.

Решение. (а) В качестве корней Черна многообразия $\mathbb{C}P^n$ можно взять $t_1 = \ldots = t_{n+1} = t$ (их больше чем надо, но это и не страшно, главное, чтобы была верна формула $\prod(1+t_i) = c(\mathbb{C}P^n)$, а она верна). Таким образом, чтобы найти $\mathrm{Td}(\mathbb{C}P^n)$, надо проинтегрировать когомологический класс $\prod_{i=1}^{n+1} \frac{t_i}{1-e^{-t_i}} = \left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{n+1}$ по многообразию $\mathbb{C}P^n$. Иными словами, надо найти коэффициент при члене z^n у формального ряда $\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^{n+1}$. Из комплексного анализа известно, что этот коэффициент равен

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{1}{z^{n+1}} \frac{z^{n+1}dz}{(1-e^{-z})^{n+1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{dz}{(1-e^{-z})^{n+1}}.$$

При замене $u = 1-e^{-z}$ (т.е. $z = -\ln(1-u)$) последнее выражение записывается в виде

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{du}{u^{n+1}(1-u)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint (u^{-n-1} + u^{-n} + u^{-n+1} + \ldots)du = 1.$$

Род Тодда равен 1.

(б) Начало рассуждений полностью аналогично предыдущему пункту. Значение $\chi_y(\mathbb{C}P^n)$ равно

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{1}{z^{n+1}} \frac{z^{n+1}(1+ye^{-z(1+y)})^{n+1}dz}{(1-e^{-z(1+y)})^{n+1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{(1+ye^{-z(1+y)})^{n+1}dz}{(1-e^{-z(1+y)})^{n+1}}.$$

Делаем замену $u = \frac{1-e^{-z(1+y)}}{1+ye^{-z(1+y)}}$ (памятуя, что y — всего лишь параметр). Выражаем z через u:

$$e^{-z(1+y)}(yu+1) = 1-u,$$

$$z = -\frac{1}{1+y}\left(\ln(1-u) - \ln(1+yu)\right).$$

При замене интеграл превращается в

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{du}{u^{n+1}} \frac{1}{1+y} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{y}{1+yu}\right).$$

Его значение равно коэффициенту при u^n ряда $\frac{1}{1+y}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{y}{1+yu}\right)$. Этот коэффициент, как легко посчитать, равен $\frac{1}{1+y}(1+(-1)^n y^{n+1}) = 1 - y + y^2 - \ldots + (-1)^n y^n$. Это и есть ответ.

При $y=0$ получаем 1, что согласуется с ответом в пункте (а).