Топология-3, ЭКЗАМЕН, 15.05.2016.

Задача 1. (1 балл) Пусть $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ и пусть задано действие циклической группы $\mathbb{Z}_n$ с образующей a на S^3 по формуле $a(z_1, z_2) = (e^{2\pi i/n} z_1, e^{2\pi ip/n} z_2)$, где $p \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с n. Пространство орбит этого действия называется линзовым пространством и обозначается $L(n; q)$. Опишите группы гомологий и кольцо когомологий с целыми коэффициентами пространства $L(n; q)$.

Задача 2. (2 балла) Назовем билинейное отображение $f\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ невырожденным, если из условия $f(x, y) = 0$ следует либо $x = 0$, либо $y = 0$. Используя индуцированное непрерывное отображение $F\colon \mathbb{R}P^{r-1} \times \mathbb{R}P^{s-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, докажите, что число $\binom{n}{k}$ четно для всех k, удовлетворяющих неравенствам $n - s < k < r$.

Задача 3. (а, 1 балл) Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, на котором свободно действует группа $\mathbb{Z}_2$ (можно считать, что M является тотальным пространством главного $\mathbb{Z}_2$-расслоения). Докажите, что M является краем некоторого многообразия.

(б, 1 балл) Докажите, что многообразие Штифеля $V_{k,n}$ ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$ бордантно нулю.

Задача 4. Пусть $G_{4,2}$ — грассманниан комплексных 2-плоскостей в $\mathbb{C}^4$, а $c_1, c_2 \in H^*(G_{4,2}; \mathbb{Z})$ — классы Черна его канонического расслоения γ_2.

(а, 1 балл) Найти числа Бетти многообразия $G_{4,2}$.

(б, 1 балл) Описать все полиномиальные соотношения на c_1, c_2 в кольце $H^*(G_{4,2}; \mathbb{Z})$.

(в, 1 балл) Вычислить сигнатуру многообразия $G_{4,2}$.

(г, 2 балла) Доказать, что $TG_{4,2} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_2, \gamma_2^{\perp})$.

(д, 1 балл за каждый класс) Выразить классы Черна и классы Понтрягина комплексного многообразия $G_{4,2}$ через c_1, c_2.

Задача 5. (а, 1 балл) Вычислить род Тодда комплексного многообразия $\mathbb{C}P^n$. (Замечание: выбор знака образующей кольца $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$ надо делать таким образом, чтобы $c(\mathbb{C}P^n) = (1 + t)^{n+1}$)

(б, 2 балла) Вычислить χ_y-род многообразия $\mathbb{C}P^n$ (χ_y-род — это род Хирцебруха стабильно комплексных многообразий, принимающий значение в $\mathbb{Q}[y]$, и заданный рядом $Q_y(t) = \dfrac{t(1 + ye^{-t(1+y)})}{1 - e^{-t(1+y)}} \in \mathbb{Q}[y][[t]]$. Род Тодда — это χ_0). Теоремой Хирцебруха о связи с числами Ходжа пользоваться нельзя.